Zelluläre Basen von symplektischen q-Schur-Algebren

Sebastian Oehms, Universität Stuttgart [1]

1 Einleitung

Es werden symplektische Schur-Algebren im Sinne von [D2] und [Dt] betrachtet sowie q-analoge Versionen davon, die mit Hilfe der FRT-Konstruktion aus der Theorie der Quantengruppen erhalten werden. Von diesen werden zelluläre Basen im Sinne von [GL] mit Hilfe von "quantensymplektischen Bideterminanten" konstruiert.

2 Symplektische Schur-Algebren

Es sei zunächst an die klassische Definition der Schur-Algebren erinnert. Untersucht man polynomiale Darstellungen der generellen linearen Gruppe $GL_n(K)$ über einem unendlichen Körper K, so betrachtet man den Polynomring

$$A_K(n) := K[c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{nn}]$$

mit den Einträgen einer $(n \times n)$-Matrix als den Unbestimmten. Dies ist der Koordinatenring $K[M_n(K)]$ des Monoids $M_n(K)$ der $(n \times n)$-Matrizen über K und im Fall eines algebraisch abgeschlossenen Körpers ebenso der Ring regulärer Funktionen auf diesem Monoid. Deshalb ist in diesem Fall die polynomiale Darstellungstheorie von $GL_n(K)$ auf die rationale Darstellungstheorie von $M_n(K)$ zurückgeführt. Aufgrund der Monoidstruktur von $M_n(K)$ trägt $A_K(n)$ die Struktur einer Bialgebra, deren Komultiplikation $\Delta : A_K(n) \to A_K(n) \otimes A_K(n)$ durch die Multiplikation und deren Koeins $\epsilon : A_K(n) \to K$ durch das Einselement von $M_n(K)$ induziert ist. Als Algebra ist $A_K(n)$ graduiert:

$$A_K(n) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} A_K(n, r),$$

wobei $A_K(n, r)$ neben dem Nullpolynom aus den vom Grad r homogenen Polynomen besteht. Die homogenen Summanden $A_K(n, r)$ selbst sind Unterkoalgebren von $A_K(n)$ endlicher Dimension. Deren duale Algebren

$$S_K(n, r) := A_K(n, r)^* = \mathrm{Hom}_K(A_K(n, r), K)$$

sind die von J.A. Green ([G1]) nach I. Schur benannten Algebren, deren Darstellungstheorie die vom Grad r homogenen polynomialen Darstellungen der $GL_n(K)$ widergibt.

Im Hinblick auf eine charakteristikfreie Behandlung der polynomialen Darstellungstheorie der generellen linearen Gruppen empfiehlt sich die Betrachtung der Schur-Algebren $S_R(n, r) := A_R(n, r)^* = \mathrm{Hom}_R(A_R(n, r), R)$ über kommutativen Ringen R mit Eins, wobei $A_R(n, r)$ die homogenen Summanden der graduierten R-Bialgebra $A_R(n) := R[c_{11}, c_{12} \ldots, c_{nn}]$ sind. Es gilt dann bekanntlich für jeden Körper K

$$S_K(n, r) \cong K \otimes_{\mathbb{Z}} S_{\mathbb{Z}}(n, r).$$

[1] E-Mail: seba@tunix.mathematik.uni-stuttgart.de

Weiterhin sind von R. Dipper und G. James ([DJ]) im Zusammenhang mit der modularen Darstellungstheorie der generellen linearen Gruppen über endlichen Körpern in nichtbeschreibender Charakteristik q-analoge Versionen von Schur-Algebren, sogenannte q-Schur-Algebren, eingeführt worden. In [DD] wurde gezeigt, daß diese in Analogie zu obigen Definitionen (bis auf Morita-Äquvalenz) auch als duale Algebren

$$S_{R,q}(n,r) := A_{R,q}(n,r)^* = \mathrm{Hom}_R(A_{R,q}(n,r), R)$$

homogener Summanden $A_{R,q}(n,r)$ einer graduierten, i.A. nicht kommutativen Bialgebra $A_{R,q}(n) = R < x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{nn} > /I$ aufgefaßt werden kann. Diese Bialgebra kann man als Koordinatenring eines "Quantenmonoidschemas" $M_{n,q}(R)$ ansehen. Darin ist R ein kommutativer Ring mit Eins und einer Einheit $q \in R$. Die spitzen Klammern stehen für den nichtkommutativen Polynomring über R, also die freie Algebra in den Unbestimmten x_{ij}. Die Erzeuger des Ideals I führen zu folgenden Relationen unter den Restklassen c_{ij} der x_{ij}:

$$\begin{array}{ll} c_{ik}c_{jl} = qc_{jl}c_{ik} & i > j, k \leq l, \\ c_{ik}c_{jl} = c_{jl}c_{ik} + (q-1)c_{jk}c_{il} & i > j, k > l, \\ c_{ik}c_{il} = c_{il}c_{ik} & 1 \leq i, k, l \leq n. \end{array}$$

Im Fall $q = 1$ und $R = \mathbb{Z}$ erhält man die obige ganzzahlige Version $S_{\mathbb{Z}}(n,r)$.

Schließlich sei noch der Zusammenhang zwischen Schur-Algebren und der Operation der symmetrischen Gruppe S_r auf dem r-fachen Tensorprodukt $V^{\otimes r}$ des natürlichen Moduls $V = R^n$ durch Platzvertauschung erwähnt. Es gilt bekanntlich $S_R(n,r) \cong \mathrm{End}_{S_r}(V^{\otimes r})$. In Analogie zur Operation von S_r auf $V^{\otimes r}$ gibt es eine Operation der Iwahori-Hecke-Algebra $\mathcal{H}_{R,r}$ vom Typ A auf $V^{\otimes r}$, bezüglich der $S_{R,q}(n,r) \cong \mathrm{End}_{\mathcal{H}_{R,r}}(V^{\otimes r})$ gilt.

Zur Definition von *symplektischen* Schur-Algebren ist zunächst ein algebraisches Monoid anzugeben, welches die Rolle von $M_n(K)$ im Zusammenhang mit den symplektischen Gruppen übernimmt. Wir definieren ein solches durch

$$SpM_n(K) := \{A \in M_n(K) |\, \exists\, g(A) \in K,\ \ A^tJA = g(A)J = AJA^t\}.$$

Die Funktion $g : SpM_n(K) \to K$ wird dann notwendigerweise zu einem rationalen Charakter von $SpM_n(K)$. Wir nennen $g(A)$ den Dilatationskoeffizienten von A. J ist die Gram-Matrix einer nichtausgearteten schiefsymmetrischen Bilinearform, die wir o.B.d.A. als $J = (\epsilon_i \delta_{ii'})$ mit $\epsilon_i := 1$ für $i \leq m := \frac{n}{2}$ und $\epsilon_i := -1$ für $i > m$ sowie $i' := n - i + 1$ wählen. Die Gruppe der symplektischen Ähnlichkeiten $GSp_n(K)$ ist die Gruppe der Einheiten darin, also $GSp_n(K) = \{A \in SpM_n(K) |\, g(A) \neq 0\}$, während die symplektische Gruppe $Sp_n(K)$ selbst aus denjenigen Elementen A von $SpM_n(K)$ besteht, deren Dilatationskoeffizient $g(A)$ Eins ist. Das Monoid $SpM_n(K)$ wurde auch von D.J. Grigorev ([Gg]) und S. Doty [Dt] betrachtet, dessen Bezeichnung hier übernommen wurde.

Da mit jedem $A \in SpM_n(K)$ und $c \in K$ auch das Vielfache cA in $SpM_n(K)$ liegt, ist der Koordinatenring

$$A_K^s(n) := K[SpM_n(K)]$$

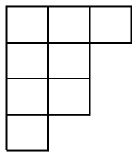
eine graduierte Bialgebra, deren homogene Summanden wir mit $A_K^s(n,r)$ bezeichnen. Da es sich auch wieder um Unterkoalgebren von $A_K^s(n)$ handelt, können wir die endlichdimensionalen dualen Algebren

$$S_K^s(n,r) := A_K^s(n,r)^*$$

bilden, die als symplektische Schur-Algebren betrachtet werden sollen. Wir werden in analoger Weise zur Bildung von $S_{R,q}(n,r)$ eine q-analoge Version von $S_K^s(n,r)$ definieren, die für $R=\mathbb{Z}$ und $q=1$ zu einer ganzzahligen Version von $S_K^s(n,r)$ spezialisiert. Weiterhin werden wir eine freie Basis mit guten Eigenschaften für die Darstellungstheorie dieser Algebra angeben. Hierzu benötigen wir Bideterminanten, die nun betrachtet werden sollen.

3 Bideterminanten

Die Menge der Partitionen einer natürlichen Zahl r in nicht mehr als n positive Summanden bezeichnen wir mit $\Lambda^+(n,r)$. Die Elemente von $\Lambda^+(n,r)$ werden als n-Tupel $\lambda := (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ von nichtnegativen ganzen Zahlen λ_i mit $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq 0$ und $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = r$ geschrieben. Wir veranschaulichen eine Partition λ durch ein Diagramm, welches in der ersten Zeile λ_1 Kästchen, in der zweiten λ_2 und in der letzten Zeile λ_n Kästchen enthält. Für $\lambda = (3,2,2,1) \in \Lambda^+(4,8)$ erhält man z.B.:



Zu einem Multi-Index $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_r)$ mit $i_j \in \underline{n} := \{1, \ldots, n\}$ betrachten wir λ-Tableaus in $\underline{n}$. Ein solches erhält man, indem man die Einträge von $\mathbf{i}$ Spalte für Spalte, von oben nach unten, in das Diagramm von λ einträgt. In obigem Beispiel ist also zu $\mathbf{i} \in I(n,8)$ (wir schreiben $I(n,r) := \underline{r}^{\underline{n}}$ für die Menge aller Multi-Indizes mit r Komponenten)

$$T_{\mathbf{i}}^{\lambda} := \begin{array}{|c|c|c|} \hline i_1 & i_5 & i_8 \\ \hline i_2 & i_6 \\ \cline{1-2} i_3 & i_7 \\ \cline{1-2} i_4 \\ \cline{1-1} \end{array} \quad .$$

Ein λ-Tableau $T_{\mathbf{i}}^{\lambda}$ heißt *spaltenstandard*, wenn die Einträge in allen Spalten echt von oben nach unten ansteigen. Sind zusätzlich die Zeilen von links nach rechts (schwach) ansteigend, so nennen wir das Tableau *standard*. Die Menge der Multi-Indizes $\mathbf{i} \in I(n,r)$, für die $T_{\mathbf{i}}^{\lambda}$ standard ist, bezeichnen wir mit $M(\lambda)$ und diejenige Obermenge, für die das zugehörige Tableau lediglich spaltenstandard ist, mit $M'(\lambda)$.

Zu $\lambda \in \Lambda^+(n,r)$ erhält man mit $p := \lambda_1$ die *duale* Partition $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_p) \in \Lambda^+(p,r)$, die bekanntlich durch $\lambda'_i := |\{j|\ \lambda_j \geq i\}|$ definiert ist. Die Komponenten sind gerade die Spaltenlängen des Diagramms von λ. Die *Standard-Young-Untergruppe* S^{λ} der symmetrischen Gruppe S_r zur Partition λ ist diejenige Untergruppe, welche die Teilmengen $\{1, \ldots, \lambda_1\}$, $\{\lambda_1+1, \ldots, \lambda_1+\lambda_2\}, \ldots$ von $\underline{r}$ als Ganzes invariant läßt. Die Standard-Young-Untergruppe $S^{\lambda'}$ zur dualen Partition von $\lambda = (3,2,2,1)$ aus obigem Beispiel ist also die Untergruppe von S_8, die $\{1,2,3,4\}$, $\{5,6,7\}$ und $\{8\}$ in sich abbildet. Dies ist der *Spaltenstabilisator* von λ. Wir definieren nun Bideterminanten durch

$$T^{\lambda}(\mathbf{i}:\mathbf{j}) := \sum_{w \in S^{\lambda'}} (-1)^{l(w)} c_{\mathbf{i}(\mathbf{j}w)} = \sum_{w \in S^{\lambda'}} (-1)^{l(w)} c_{(\mathbf{i}w)\mathbf{j}}.$$

Darin werden die Abkürzungen $c_{\mathbf{ij}} := c_{i_1 j_1} c_{i_2 j_2} \ldots c_{i_r j_r}$ und $\mathbf{i}w := (i_{w(1)}, i_{w(2)}, \ldots, i_{w(r)})$ zu $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in I(n,r)$ und $w \in S_r$ verwendet. $l(w)$ steht für die Länge der Permutation w. Man sieht leicht, daß Bideterminanten Produkte von Unterdeterminanten sind, und zwar von genau $p = \lambda_1$ Stück. Beispiel für $\lambda = (2,2)$:

$$T_{\mathbf{i}}^{\lambda} := \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array} \quad , \; T_{\mathbf{j}}^{\lambda} := \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array} \quad , \quad \text{dann ist: } T^{\lambda}(\mathbf{i}:\mathbf{j}) = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{31} & c_{32} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c_{21} & c_{23} \\ c_{41} & c_{43} \end{vmatrix}.$$

Bideterminanten werden schon lange im Zusammenhang mit klassischer Invariantentheorie betrachtet ([G1], [Ma]). Die Grundlage für ihre Bedeutung in der Darstellungstheorie der generellen linearen Gruppe bzw. der Schur-Algebren ergibt sich einerseits aus dem

Satz 3.1 (Mead ([Me]); Doubilet, Rota, Stein ([DRS])) *Über einem beliebigen kommutativen Ring R mit Eins besitzt $A_R(n,r)$ die freie Basis*

$$B := \{T^{\lambda}(\mathbf{i}:\mathbf{j}) |\; \lambda \in \Lambda^{+}(n,r),\; \mathbf{i},\mathbf{j} \in M(\lambda)\}.$$

Andererseits spielt der Sachverhalt, daß sie Koeffizientenfunktionen der $M_n(R)$-Moduln

$$V(\lambda) := \bigwedge^{\lambda'_1} \otimes \bigwedge^{\lambda'_2} \otimes \ldots \otimes \bigwedge^{\lambda'_p}$$

sind, eine Rolle, wobei $\bigwedge = \bigoplus_{r=0}^{n} \bigwedge^r$ die äußere Algebra bezeichnet. J.A. Green verwendet Bideterminanten in [G1] zur Definition der Schur-Moduln $D_{\lambda,K}$. In [G2] gibt er eine Basis für $S_R(n,r)$ an, die im "wesentlichen" dual zu obiger Basis ist und deren Elemente *Kodeterminanten* genannt werden. "Wesentlich" soll heißen: Die Transformationsmatrix zur dualen Basis von B ist unimodular, wenn eine geeignete Ordnung der Basiselemente zugrunde gelegt wird. Green benutzt die Kodeterminanten, um die charakteristikfreie Darstellungstheorie der Schur-Algebren in eleganter Weise zu formulieren und ihre Quasi-Erblichkeit zu zeigen. Die wesentlichen Eigenschaften der Kodeterminantenbasis, welche dazu befähigen, lassen sich durch eine Axiomatik beschreiben, die auf J.J. Graham und G.I. Lehrer ([GL]) zurückgeht und die nun vorgestellt werden soll.

4 Zelluläre Algebren

Eine *zelluläre Algebra* ist eine assoziative (unitale) Algebra A über einem kommutativen Ring R mit Eins zusammen mit einer teilweise geordneten Menge Λ, deren Endlichkeit wir im Gegensatz zu [GL] annehmen wollen (vgl. [KX] remark S. 6), und endlichen Mengen $M(\lambda)$ zu jedem $\lambda \in \Lambda$ (Menge der "λ-Tableaus"), so daß die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

(C1) A besitzt eine Basis $\{C^{\lambda}_{S,T} |\; \lambda \in \Lambda,\; S,T \in M(\lambda)\}$.

(C2) A besitzt eine R-lineare Anti-Involution $*$, für die $(C^{\lambda}_{S,T})^* = C^{\lambda}_{T,S}$ für alle $\lambda \in \Lambda$ und $S,T \in M(\lambda)$ gilt.

(C3) Für alle $a \in A, \lambda \in \Lambda$ und $S,T \in M(\lambda)$ gilt:

$$aC^{\lambda}_{S,T} \equiv \sum_{S' \in M(\lambda)} r_a(S',S) C^{\lambda}_{S',T} \mod A(<\lambda),$$

wobei die Zahlen $r_a(S',S) \in R$ unabhängig von T sind und $A(<\lambda)$ der R-lineare Aufspann der Basiselemente $C^{\mu}_{U,V}$ mit $\mu < \lambda$ und $U,V \in M(\mu)$ ist.

Aufbauend auf diesen Vorgaben wird die Darstellungstheorie einer zellulären Algebra in [GL] entwickelt: Zunächst kann man zu jedem $\lambda \in \Lambda$ einen Standardmodul $W(\lambda)$ durch Vorgabe einer freien R-Basis $\{C^{\lambda}_S |\; S \in M(\lambda)\}$ und der Operation darauf durch $aC^{\lambda}_S = \sum_{S' \in M(\lambda)} r_a(S',S) C^{\lambda}_{S'}$ definieren. Sodann findet man auf jedem $W(\lambda)$ eine symmetrische Bilinearform ϕ_λ mit $\phi_\lambda(a^*x,y) =$

$\phi_\lambda(x, ay)$ für alle $a \in A$ und $x, y \in W(\lambda)$. Ist nun R ein Körper und $\phi_\lambda \neq 0$, so stimmt das Radikal des Moduls $W(\lambda)$ mit dem Radikal der Bilinearform ϕ_λ überein und der einfache Kopf L_λ von $W(\lambda)$ ist absolut irreduzibel. Darüber hinaus erhält man auf diese Art eine vollständige Menge paarweise nichtisomorpher einfacher A-Moduln $\{L_\lambda |\ \lambda \in \Lambda_0\}$, wobei $\Lambda_0 := \{\lambda \in \Lambda |\ \phi_\lambda \neq 0\}$ gesetzt wurde.
Bezeichnet man zu $\lambda \in \Lambda$ und $\mu \in \Lambda_0$ mit $d_{\lambda\mu}$ die Vielfachheit von L_μ in $W(\lambda)$, so zeigen Graham und Lehrer weiter, daß $d_{\lambda\mu} = 0$ für $\lambda \leq \mu$ und $d_{\lambda\lambda} = 1$ gilt. Unter einer Ordnung, welche die teilweise Ordnung auf Λ verfeinert, erhält man somit eine obere unitrianguläre Matrix als Zerlegungsmatrix $D = (d_{\lambda\mu})_{\lambda\in\Lambda,\mu\in\Lambda_0}$. Die Cartan-Matrix C berechnet sich daraus zu $C = D^t D$. Die Theorie liefert ebenso Kriterien für die Halbeinfachheit bzw. Quasi-Erblichkeit von A. Im ersten Fall muß $\mathrm{rad}(\phi_\lambda) = (0)$ für alle $\lambda \in \Lambda$ gelten, für den zweiten Fall reicht $\Lambda_0 = \Lambda$.

Beispiele für zelluläre Algebren sind etwa Brauer's Zentralisator-Algebra, Ariki-Koike-Hecke-Algebren, Temperley-Lieb- und Jones-Algebren ([GL]). R. Green ([Gr]) gibt eine q-analoge Version der oben beschriebenen Kodeterminantenbasis von $S_{\mathbb{Z}}(n,r)$ für die q-Schur-Algebra $S_{R,q}(n,r)$ an, welche zellulär ist. Die Standardmoduln bezüglich dieser zellulären Struktur sind gerade die q-Weyl-Moduln. Tatsächlich ist im klassischen Fall sogar die duale Basis zur Basis B aus Satz 3.1 eine zelluläre Basis von $S_R(n,r)$ ebenfalls mit den Weyl-Moduln als den Standardmoduln. Um dies näher zu beleuchten, geben wir das duale Konzept einer zellulären Koalgebra an.

Eine *zelluläre Koalgebra* ist eine Koalgebra K über einem kommutativen Ring R mit Eins, zusammen mit einer endlichen, teilweise geordneten Menge Λ und endlichen Mengen $M(\lambda)$ zu jedem $\lambda \in \Lambda$, so daß die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

(C1*) K besitzt eine Basis $\{C^\lambda_{S,T} |\ \lambda \in \Lambda,\ S, T \in M(\lambda)\}$.

(C2*) K besitzt einen R-linearen involutorischen Anti-Koalgebrenautomorphismus $*$, für den $(C^\lambda_{S,T})^* = C^\lambda_{T,S}$ für alle $\lambda \in \Lambda$ und $S, T \in M(\lambda)$ gilt.

(C3*) Für alle $\lambda \in \Lambda$ und $S, T \in M(\lambda)$ gilt bezüglich der Komultiplikation Δ:

$$\Delta(C^\lambda_{S,T}) \equiv \sum_{S' \in M(\lambda)} a(S', S) \otimes C^\lambda_{S',T} \mod K \otimes K(> \lambda),$$

wobei die Koalgebrenelemente $a(S', S) \in K$ unabhängig von T sind und $K(> \lambda)$ der R-lineare Aufspann der Basiselemente $C^\mu_{U,V}$ mit $\mu > \lambda$ und $U, V \in M(\mu)$ ist.

Es ist eine einfache Übungsaufgabe zu zeigen, daß die duale Algebra einer zellulären Koalgebra eine zelluläre Algebra mit der dualen Basis als zellulärer Basis ist. Der umgekehrte Sachverhalt gilt ebenso. Da die Bideterminanten Koeffizientenfunktionen der Moduln $V(\lambda)$ sind, erhält man bezüglich der Komultiplikation $\Delta : A_R(n,r) \to A_R(n,r) \otimes A_R(n,r)$ die Formel

$$\Delta(T^\lambda(\mathbf{i} : \mathbf{j})) = \sum_{\mathbf{k} \in M'(\lambda)} T^\lambda(\mathbf{i} : \mathbf{k}) \otimes T^\lambda(\mathbf{k} : \mathbf{j}).$$

Nun zeigt sich im Beweis von Satz 3.1 (siehe etwa [Ma]), daß bei geeigneter Ordnung auf $\Lambda = \Lambda^+(n,r)$ (lexikographische Ordnung bezüglich dualer Partitionen λ') zu $\mathbf{k} \in M'(\lambda)$ von $\mathbf{j}$ unabhängige Zahlen $a_{\mathbf{kl}} \in \mathbb{Z}$ existieren mit

$$T^\lambda(\mathbf{k} : \mathbf{j}) \equiv \sum_{\mathbf{l} \in M(\lambda)} a_{\mathbf{kl}} T^\lambda(\mathbf{l} : \mathbf{j}) \mod A_R(n,r)(> \lambda),$$

woraus die Eigenschaft (C3*) für B folgt. (C1*) ergibt sich sofort aus dem Satz, während der Anti-Koalgebrenautomorphismus, der durch Matrixtransposition auf $A_R(n)$ induziert ist, dem Axiom (C2*) genügt. Also ist B eine zelluläre Basis von $A_R(n,r)$.

5 Symplektische q-Schur-Algebren

In ähnlicher Weise wie in Abschnitt 2 ein q-Analogon zu $S_R(n,r)$ definiert wurde, soll nun ein q-Analogon zu den symplektischen Schur-Algebren $S_K^s(n,r)$ über einem kommutativen Ring R zu einer Einheit $q \in R$ definiert werden. Die Konstruktion ist aus der Theorie der Quantengruppen bekannt und wird nach L.D. Faddeev, N.Y. Reshetikhin und L.A. Takhtadjian auch FRT-Konstruktion genannt ([FRT]). Die hier angewandte Version ist eine leichte Verallgemeinerung davon, die - falls $(q-1)$ keine Einheit ist - notwendig ist, um Torsionselemente zu vermeiden. Wir setzen wie oben an

$$A_{R,q}^s(n) = R < x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{nn} > /I^s.$$

Das Ideal I^s wird ebenfalls von homogenen Elementen zweiten Grades erzeugt. Diese lassen sich jedoch nicht mehr so übersichtlich aufschreiben. Zu ihrer Definition betrachten wir die folgenden Endomorphismen von $V^{\otimes 2}$ $(V = R^n)$:

$$\beta := \sum_{1\le i\le n} (qE_{ii}\otimes E_{ii} + E_{ii'}\otimes E_{i'i}) \;+\; v \sum_{1\le i\ne j,j'\le n} E_{ij}\otimes E_{ji} +$$

$$+ (q-1) \sum_{1\le j<i\le n} (E_{ii}\otimes E_{jj} - v^{\rho_i-\rho_j}\epsilon_i\epsilon_j E_{ij'}\otimes E_{i'j})$$

und

$$\gamma := \sum_{1\le i,j\le n} v^{\rho_i-\rho_j}\epsilon_i\epsilon_j E_{ij'}\otimes E_{i'j};$$

darin sind E_{ij} die Matrixeinheiten in $\mathrm{End}_R(V)$. Weiter ist $v \in R$ mit $v^2 = q$, $(\rho_1, \ldots, \rho_n) = (m, m-1, \ldots, 1, -1, \ldots, -(m-1), -m)$ sowie $\epsilon_i := sign(\rho_i)$.

Durch β und γ sind Darstellungen der Birman-Murakami-Wenzl Algebren $\mathcal{BMW}_{R,r}$ auf den r-fachen Tensorprodukten $V^{\otimes r}$ des natürlichen Moduls V gegeben, indem die Erzeuger derselben durch die Endomorphismen

$$\beta_i := \mathrm{id}_{V^{\otimes i-1}} \otimes \beta \otimes \mathrm{id}_{V^{\otimes r-i-1}} \quad \text{und} \quad \gamma_i := \mathrm{id}_{V^{\otimes i-1}} \otimes \gamma \otimes \mathrm{id}_{V^{\otimes r-i-1}}$$

operieren. Die Herleitung von β und γ beruht auf der Drinfeld'schen Quantendoppelkonstruktion und es soll hier nicht näher darauf eingegangen werden. Referenzen auf Orginalliteratur sowie entsprechende Formeln für die Typen B und D findet man etwa in [Ta] bzw. in [Ha] (in Bezug auf multiparametrische Versionen davon).

Zur Beschreibung von I^s führen wir zu einem Endomorphismus $\alpha \in \mathrm{End}_R(V^{\otimes r})$ folgende Schreibweise ein

$$\alpha x_{\mathbf{ij}} := \sum_{\mathbf{k}\in I(n,r)} a_{\mathbf{ik}} x_{\mathbf{kj}} \quad \text{und} \quad x_{\mathbf{ij}}\alpha := \sum_{\mathbf{k}\in I(n,r)} x_{\mathbf{ik}} a_{\mathbf{kj}},$$

worin wiederum $x_{\mathbf{ij}} := x_{i_1j_1}x_{i_2j_2}\ldots x_{i_rj_r}$ die Monome in den x_{ij} sind und $(a_{\mathbf{ij}})_{\mathbf{i},\mathbf{j}\in I(n,r)}$ die Koeffizientenmatrix von α bezüglich der kanonischen Basis von $V^{\otimes r}$ ist. Das Ideal I^s wird dann von

$$\{\beta x_{\mathbf{ij}} - x_{\mathbf{ij}}\beta, \gamma x_{\mathbf{ij}} - x_{\mathbf{ij}}\gamma \mid \mathbf{i},\mathbf{j} \in I(n,2)\}$$

erzeugt. Es ist ein homogenes Biideal in der Bialgebra $R < x_{11}, \ldots, x_{nn} >$ und man erhält wiederum eine graduierte Bialgebra $A_{R,q}^s(n) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} A_{R,q}^s(n,r)$, deren homogene Summanden Unterkoalgebren sind. Als symplektische q-Schur-Algebra definieren wir dann

$$S^s_{R,q}(n,r) := A^s_{R,q}(n,r)^* = \mathrm{Hom}_R(A^s_{R,q}(n,r), R).$$

Aufgrund der Konstruktion von $A^s_{R,q}(n)$ ist die Koalgebra $A^s_{R,q}(n,r)$ in gewissem Sinn ein Koalgebren-Analogon zur Bildung des Zentralisators einer Unteralgebra von $\mathrm{End}_R(V^{\otimes r})$ (in diesem Falle des Bildes der Birman-Murakami-Wenzl-Algebra unter der oben angebenen Darstellung). Dies führt in Analogie zu $S_R(n,r) \cong \mathrm{End}_{S_r}(V^{\otimes r})$ auf einen Algebrenisomorphismus

$$S^s_{R,q}(n,r) \cong \mathrm{End}_{\mathcal{BMW}_{R,r}}(V^{\otimes r}) \text{ bzw. für } q=1 \text{ auf } S^s_{R,1}(n,r) \cong \mathrm{End}_{\mathcal{B}_{R,r}}(V^{\otimes r}),$$

wobei mit $\mathcal{B}_{R,r}$ Brauer's Zentralisator-Algebra gemeint ist, zu der $\mathcal{BMW}_{R,r}$ für $q=1$ spezialisiert. Während für einen kommutativen Ring S und einen Ringhomomorphismus $R \to S$ mit $q \mapsto \bar{q}$ stets ein Isomorphismus $S \otimes_R A^s_{R,q}(n,r) \cong A^s_{S,\bar{q}}(n,r)$ von Koalgebren besteht, ist ein entsprechender Algebrenisomorphismus $S \otimes_R S^s_{R,q}(n,r) \cong S^s_{S,\bar{q}}(n,r)$ erst dann gesichert, wenn bekannt ist, daß $A^s_{R,q}(n,r)$ als R-Modul projektiv ist. Wir werden nun unter gewissen Einschränkungen für q eine freie Basis für $A^s_{R,q}(n,r)$ angeben, die für die ausgeschlossenen Werte von q vermutlich ebenso eine Basis bleibt. In der Beweisführung sind diesbezüglich jedoch Schwierigkeiten vorhanden, die sich bislang nicht ausräumen ließen.

Wir geben dazu zunächst eine quantensymplektische Version von Bideterminaten. Zu einer Permutation $w \in S_r$, die als reduzierter Ausruck $w = s_{i_1}s_{i_2}\dots s_{i_t}$ mit Nachbarvertauschungen $s_i := (i, i+1) \in S_r$ vorliegen möge, setzen wir

$$\beta(w) := \beta_{i_1}\beta_{i_2}\dots\beta_{i_t} \in \mathrm{End}_R(V^{\otimes r}).$$

Diese Definition ist unabhängig vom reduzierten Ausdruck, da sich zwei reduzierte Ausdrücke für w allein durch Anwendungen von Zopfrelationen ineinander überführen lassen und die β_i die Zopfrelationen $\beta_i\beta_{i+1}\beta_i = \beta_{i+1}\beta_i\beta_{i+1}$ für $1 \le i < r$ erfüllen (β ist ein sogenannter *Quanten-Yang-Baxter-Operator*). Wir setzen dann

$$T^\lambda_q(\mathbf{i}:\mathbf{j}) := \sum_{w \in S^{\lambda'}} (-q)^{-l(w)}\beta(w)c_{\mathbf{ij}} = \sum_{w \in S^{\lambda'}} (-q)^{-l(w)}c_{\mathbf{ij}}\beta(w)$$

und nennen diese Elemente quantensymplektische Bideterminanten. Darin sind $c_{\mathbf{ij}}$ die Restklassen der Monome $x_{\mathbf{ij}}$ in $A^s_{R,q}(n,r)$. Die Gleichheit $\beta(w)c_{\mathbf{ij}} = c_{\mathbf{ij}}\beta(w)$ ergibt sich nach Wahl des Ideals I^s. Man beachte, daß im klassischen Fall $v = q = 1$ gerade $c_{\mathbf{ij}}\beta(w) = c_{\mathbf{i}(\mathbf{j}w^{-1})}$ und $\beta(w)c_{\mathbf{ij}} = c_{(\mathbf{i}w)\mathbf{j}}$ gilt, so daß sich die in Abschnitt 3 definierten Bideterminanten ergeben.

In Analogie zum klassischen Fall erhält man die quantensymplektischen Bideterminanten auch als Produkte von ebensolchen über alle Spalten des Diagramms von λ. Daher ist es nur nötig Bideterminanten zu den Fundamentalgewichten $\lambda = \omega_r := (1,1,\dots,1,0,\dots,0)$ (r Einsen), also zu einspaltigen Diagrammen, zu kennen. Allerdings sehen auch diese schon recht kompliziert aus, wie die folgenden Beispiele zeigen:

$$T^{\omega_2}_q((k,l):(i,j)) = \left| \begin{array}{cc} c_{ki} & c_{kj} \\ c_{li} & c_{lj} \end{array} \right|_q = c_{ki}c_{lj} - v^{-1}c_{kj}c_{li}, \text{ falls } k<l, i<j, i \ne j' = n-j+1,$$

$$T^{\omega_2}_q((k,l):(i,i')) = \left| \begin{array}{cc} c_{ki} & c_{ki'} \\ c_{li} & c_{li'} \end{array} \right|_q = c_{ki}c_{li'} - q^{-1}c_{ki'}c_{li} - (q^{-1}-1)\sum_{j=1}^{i-1} v^{j-i}c_{kj'}c_{lj},$$

falls $k<l, i \le m$, sowie

$$T_q^{\omega_3}((j,k,l):(i,i',i)) = \begin{vmatrix} c_{ji} & c_{ji'} & c_{ji} \\ c_{ki} & c_{ki'} & c_{ki} \\ c_{li} & c_{li'} & c_{li} \end{vmatrix}_q \neq 0, \text{ falls } j<k<l, i \leq m.$$

Das erste Beispiel sieht der Quantendeterminante für die generellen linearen Gruppen ähnlich (siehe etwa [DD],[Ta], [Ha]). Im zweiten Beispiel erhält man jedoch eine deutlich kompliziertere Formel im Fall assoziierter Indizes $i, i' = n-i+1$. Die Berechnung des dritten Beispiels ist schon eine erhebliche Fleißaufgabe. Bemerkenswert ist, daß eine solche symplektische Quantendeterminante von Null verschieden ist, obwohl zwei gleiche Spalten vorhanden sind.

Zur Beschreibung der Basis benötigen wir auch eine q-analoge Version der Dilatationskoeffizientenfunktion $g : SpM_n(K) \to K$ die wir ebenfalls mit g bezeichnen:

$$g := v^k \sum_{i=1}^{m} v^{-i} \begin{vmatrix} c_{ki} & c_{ki'} \\ c_{k'i} & c_{k'i'} \end{vmatrix}_q = \sum_{i=1}^{n} v^{\rho_i - \rho_k} \epsilon_i c_{ki} c_{k'i'}.$$

Wie bereits erwähnt, kann das Hauptergebnis aufgrund beweistechnischer Schwierigkeiten momentan nur unter einer Einschränkung für q formuliert werden. Diese lautet:

(q) Ist $q \neq 1$ und $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ ein k-tes Kreisteilungspolynom für ein $k \leq m$, so sei $p(q)$ eine Einheit in R.

Satz 5.1 *(a) Erfüllt q die Bedingung (q), so besitzt $A^s_{R,q}(n,r)$ die zelluläre Basis*

$$B_q := \{g^l T_q^\lambda(\mathbf{i}:\mathbf{j}) |\, 0 \leq l \leq \frac{r}{2},\ \lambda \in \Lambda^+(m, r-2l),\ \mathbf{i},\mathbf{j} \in M^s(\lambda)\}.$$

In diesem Fall ist auch $S^s_{R,q}(n,r)$ eine zelluläre Algebra mit der zu B_q dualen Basis als zellulärer Basis.

(b) Im Fall $R = Z := \mathbb{Z}[q,q^{-1}]$ besitzt auch $S^s_{Z,q}(n,r)$ eine zelluläre Basis, die dual zu B_q ist.

(c) Falls q in R der Bedingung (q) genügt, so gilt (als R-Algebren):

$$R \otimes_Z S^s_{Z,q}(n,r) \cong S^s_{R,q}(n,r).$$

Es ist noch die Menge $M^s(\lambda)$, die hier als Menge von *spiegelsymplektischen* Standardtableaus bezeichnet werden soll, zu erklären. Es handelt sich dabei um eine Variante des Begriffs des *symplektischen* Standardtableaus, der auf R.C. King ([Ki]) zurückgeht. Diese Tableaus wurden auch von A. Berele ([Be]), C. de Concini ([Co]), S. Donkin ([D3]) und M. Iano-Fletcher ([Ia]) verwendet. Während King selbst symplektische Standardtableaus zur Bestimmung von Gewichtsraumdimensionen einsetzt, werden bei Berele Basen der irreduziblen $Sp_n(\mathbb{C})$-Moduln mit diesen Tableaus indiziert. De Concini zeigt, daß die (klassischen) Bideterminanten zu Paaren von symplektischen Standardtableaus eine Basis für die homogenen Summanden des Koordinatenrings $A^s_K(n)/ < g >$ der Halbgruppe $SpM_n(K)\backslash GSp_n(K)$ bilden, und legt damit den Grundstein für eine charakteristikfreie Darstellungstheorie von $Sp_n(K)$. Donkin und Iano-Fletcher haben diese Resultate in Zusammenhang mit der Theorie algebraischer Gruppen bzw. einer polynomialen Darstellungstheorie im Sinne von [G1] gebracht und Basen von symplektischen Schur- und Weyl-Moduln erhalten.

Gemäß der Definition in [Ki] sind symplektische Standardtableaus standard bezüglich der Ordnung $1' < 1 < 2' < 2 < \ldots < m' < m$ von $\underline{n}$ und erfüllen die zusätzliche Bedingung, daß für $i \leq m$ das Auftreten von i und i' auf die ersten i Zeilen beschränkt ist. Mit diesen Tableaus kann man die Gültigkeit von Satz 5.1 im klassischen Fall $v = q = 1$ ebenso zeigen. Im Fall $q \neq 1$ muß der *Straightening Algorithmus* (wie man ihn etwa aus dem symplektischen Carter-Lusztig-Lemma aus [D3] entnehmen kann) jedoch so stark variiert werden, daß die Verwendung von spiegelbildlich symplektischen Tableaus nötig wird. Ein solches Tableau ist standard bezüglich der Ordnung $m' < m < \ldots < 2' < 2 < 1' < 1$ und erfüllt die zusätzliche Bedingung, daß für $i \leq m$ das Auftreten von i und i' auf die ersten $m - i + 1$ Zeilen beschränkt ist. Beispielsweise gibt es im Fall $\lambda = \omega_2 = (1, 1, 0, \ldots, 0)$ unter den Standardtableaus der jeweiligen Ordnung jeweils genau ein nicht symplektisches bzw. ein nicht spiegelsymplektisches Tableau:

$$\begin{array}{|c|}\hline 1' \\ \hline 1 \\ \hline\end{array} \text{ ist nicht standard-symplektisch ; } \begin{array}{|c|}\hline m' \\ \hline m \\ \hline\end{array} \text{ ist nicht standard-spiegelsymplektisch.}$$

Wir geben schließlich noch einige Konsequenzen von Satz 5.1 im klassischen Fall $v = q = 1$ für einen algebraisch abgeschlossenen Körper K beliebiger Charakteristik an. Man sieht leicht, daß man einen Epimorphismus graduierter Bialgebren von $A^s_{K,1}(n)$ auf $A^s_K(n) = K[SpM_n(K)]$ hat. In [D2] und [Dt] werden symplektische Schur-Algebren als duale Algebren der homogenen Summanden des Koordinatenrings $K[\overline{GSp_n(K)}]$ des Zariski-Abschlusses der Gruppe der symplektischen Ähnlichkeiten betrachtet. Daher ist ein Vergleich mit diesen Bialgebren angebracht. Da $\overline{GSp_n(K)}$ eine abgeschlossene Teilmenge in $SpM_n(K)$ ist, hat man auch einen solchen Epimorphismus von $A^s_K(n)$ auf $K[\overline{GSp_n(K)}]$. Die Dimensionen der homogenen Summanden der letzteren Bialgebra sind aus [D2] bzw. [D1] bekannt, und sie stimmen mit den durch Satz 5.1 gegebenen Dimensionen von $A^s_{K,1}(n, r)$ überein. Also muß es sich in beiden Fällen um Isomorphismen handeln. Dies impliziert zum einen $SpM_n(K) = \overline{GSp_n(K)}$ - ein Resultat, das ebenso in [Dt] (Corollary 5.5 (f)) erreicht wird - zum anderen

Korollar 5.2 *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper beliebiger Charakteristik. Dann gilt:*

(a) Die Menge $\{f_{ij}, \bar{f}_{ij}, f_{ll'} - \bar{f}_{kk'} \mid 1 \leq i < j \leq n, i \neq j',\ 1 \leq l \leq k \leq m\}$ mit $f_{ij} := \sum_{k=1}^m c_{ik}c_{jk'} - c_{ik'}c_{jk}$ und $\bar{f}_{ij} := \sum_{k=1}^m c_{ki}c_{k'j} - c_{k'i}c_{kj}$ ist ein Erzeugendensystem für das Verschwindungsideal des Koordinatenringes $A^s_K(n) = K[SpM_n(K)]$ in $K[M_n(K)]$.

(b) Man erhält durch $A^s_{\mathbb{Z},1}(n)$ eine als $\mathbb{Z}$-Modul freie ganzzahlige Version von $A^s_K(n)$, so daß $A^s_K(n) \cong K \otimes_{\mathbb{Z}} A^s_{\mathbb{Z},1}(n) \cong A^s_{K,1}(n)$ als graduierte Bialgebren gilt. Insbesondere folgt daraus $S^s_K(n, r) \cong S^s_{K,1}(n, r) \cong \mathrm{End}_{\mathcal{B}_{K,r}}(V^{\otimes r})$.

(c) Die hier definierten symplektischen Schur-Algebren $S^s_K(n, r)$ stimmen mit den in [D2] bzw. [Dt] betrachteten ($S_O(n, r)$ bzw. $S_r(GSp_n(K))$ in der dortigen Notation) überein.

Für den Fall eines Körpers der Charakteristik Null wurde (a) und der Zusatz in (b) bereits in [Dt] (Theorem 9.5 (a) und Corollary 9.3 (c)) gezeigt.

Literatur

[Be] Berele, A.: Construction of Sp-Modules by Tableau. Linear and Multilinear Algebra 19 (1986), 299-307.

[Co] De Concini C.: Symplectic Standard Tableaux. Advances in Mathematics 34 (1979), 1-27.

[DD] Dipper, R., Donkin, S.: Quantum GL_n. Proc. London Math. Soc. 63 (1991), 165-211.

[DJ] Dipper, R., James, G.: The q-Schur Algebra. Proc. London Math. Soc. (3) 59 (1989), 23-50.

[D1] Donkin, S.: On Schur Algebras and Related Algebras I, Journal of Algebra 104 (1986), 310-328.

[D2] Donkin, S.: Good Filtrations of Rational Modules for Reductive Groups. Arcata Conf. on Repr. of Finite Groups. Proceedings of Symp. in Pure Math., Vol. 47 (1987), 69-80.

[D3] Donkin, S.: Representations of symplectic groups and the symplectic tableaux of R.C. King. Linear and Multilinear Algebra, Vol. 29 (1991), 113-124.

[Dt] Doty, S.: Polynomial Representations, Algebraic Monoids, and Schur Algebras of Classical Type. ersch. im J. of Algebra.

[DRS] Doubilet, P., Rota, G.C., Stein, J.: On the Foundations of Combinatorial Theory: IX Combinatorial Methods in Invariant Theory. Stud. in Appl. Math. Vol. LIII, No. 3 (1974), 185-216.

[FRT] Reshetikhin, N. Y., Takhtadjian, L. A., Faddeev, L. D.: Quantization of Lie groups and Lie algebras. Leningrad Math. J. 1 (1990), 193-225.

[G1] Green, J.A.: Polynomial Representations of GL_n. Lecture Notes in Math. 830. Springer 1980.

[G2] Green, J.A.: Combinatorics and the Schur algebra. J. of Pure and Appl. Algebra 88 (1993), 89-106.

[Gr] Green, R.: q-Schur algebras and quantized enveloping algebras. Thesis. University of Warwick, 1995.

[Gg] Grigor'ev, D. J.: An Analogue of the Bruhat Decomposition for the Closure of the Cone of a Chevalley Group of the Classical Series. Soviet Math. Dokl., Vol. 23 (1981), No. 2.

[GL] Graham, J.J., Lehrer, G.I.: Cellular Algebras. Invent. Math. 123 (1996), 1-34.

[Ha] Hayashi, T.: Quantum Groups and Quantum Determinants. J. of Algebra 152 (1992), 146-165.

[Ia] Iano-Fletcher, M.: Polynomial Representations of Symplectic Groups. Thesis, University of Warwick, 1990.

[Ki] King, R.C.: Weight Multiplicities for Classical Groups. Group Theoretical Methods in Physics (fourth International Colloquium, Nijmegen 1975), Lecture Notes in Physics 50, Springer 1975.

[KX] König, S., Xi, C.: On the structure of cellular algebras. preprint.

[Ma] Martin, S.: Schur Algebras and Representation Theory. Cambridge University Press, 1993.

[Me] Mead, D.G.: Determinantal Ideals, Identities, and the Wronskian. Pacific J. of Math., Vol. 42, No. 1 (1972), 165-175.

[Ta] Takhtajan, L.A.: Lectures on Quantum Groups. In: Introduction to Quantum Group and Integrable Massive Models of Quantum Field Theory (Hrsg.: M.-L. Ge, B.-H. Zhao. World Scientific, 1990.