Quanten Funktionenalgebren: Matrix Bialgebren und Quantenmonoide

Sebastian Oehms, Universität Stuttgart [1]

1 Einleitung

Es wird die im vorangegangenen Vortrag erläuterte R-Matrix Quantisierung aus einer Sichtweise betrachtet, die den Zusammenhang mit den Schur und q-Schur Algebren darlegt. In der Weise, in der durch die Arbeit von Schur die Theorie der polynomialen Darstellungen der generellen linearen Gruppen auf die Theorie der rationalen Darstellungen des algebraischen Monoids der $n \times n$-Matrizen zurückgeführt ist, werden auch hier Quantisierungen algebraischer Monoide im Vordergrund stehen. Deren Koordinatenringe sind gerade die bei der R-Matrix Quantisierung auftretenden Matrix Bialgebren. Wir beginnen mit der allgemeiner Untersuchung dieser graduierten Bialgebren und deren homogener Summanden den Matrix Koalgebren. Die Koordinatenringe der Quantengruppen entstehen dann durch Lokalisations und Quotientenbildungsprozesse aus denen der Quantenmonoide. Dabei werden auch die Beispiele aus 7.3 [CP] behandelt.

2 Matrix Koalgebren

Sei k ein Integritätsbereich mit 1 und V ein freier k-Modul mit Basis $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Für den Ring der k-linearen Endomorphismen von V schreiben wir $E := \mathrm{End}_k(V)$ sowie $E^* := \mathrm{Hom}_k(E, k)$ für den dazu dualen k-Modul. Weiterhin fixieren wir die Bezeichnung für die Basis aus Matrixeinheiten in E durch $\{e_{11}, e_{12}, \ldots, e_{nn}\}$ und für die dazu duale Basis in E^* durch $\{t_{11}, t_{12}, \ldots, t_{nn}\}$. Um den Zusammenhang mit der R-Matrix Quantisierung aus dem vorigen Vortrag aufzuzeigen setzen wir $T := (t_{ij})_{i,j=1,\ldots,n}$.

Zu einer Koalgebra K über k erhält man stets durch Dualisieren von Komultiplikation und Koeins eine k-Algebrenstruktur auf $K^* = \mathrm{Hom}_k(K, k)$, während umgekehrt zu einer k-Algebra A nicht unbedingt eine k-Koalgebren Struktur auf A^* induziert sein muß. Ist A jedoch ein endlich erzeugter projektiver k-Modul, so erhält man eine solche Struktur unter Ausnützung des natürlichen Isomorphismus zwischen $A^* \otimes A^*$ und $(A \otimes A)^*$. Im Fall von E sind diese Voraussetzungen erfüllt und man erhält für die induzierte Komultiplikation Δ und Koeins ϵ auf E^* bezüglich der oben eingeführten Basis die Formeln:

$$\Delta(t_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} t_{ik} \otimes t_{kj} \text{ oder kurz: } \Delta(T) = T \boxdot T$$

$$\epsilon(t_{ij}) = \delta_{ij} \text{ oder kurz: } \Delta(T) = I.$$

Die Bedeutung von $\boxdot$ entnehme man dem vorherigen Vortrag, δ ist das Kroneckersymbol und I die Einheitsmatrix. Weiterhin erhält man E^* Links- und Rechtskomodul Strukturen auf V durch

$$\tau_V^l(x_i) = \sum_{k=1}^{n} t_{ik} \otimes x_k, \quad \tau_V^r(x_i) = \sum_{k=1}^{n} x_k \otimes t_{ki}.$$

[1] E-Mail: seba@tunix.mathematik.uni-stuttgart.de

Eine k-Koalgebra M zusammen mit einem Epimorphismus von k-Koalgebren $\tau : E^* \to M$ nennen wir eine *Matrix Koalgebra vom Rang n*. E^* selbst kann man somit als *universelle* oder (freie) Matrix Koalgebra vom Rang n ansehen.

Matrix Koalgebren sind demnach das duale Gegenstück zu Unteralgebren von E. Eine besonders wichtige Sorte von Unteralgebren von E treten als Zentralisatoren $C(A) := \mathrm{End}_A(V)$ von Teilmengen $A \subseteq E$ in Erscheinung. Dual hierzu konstruieren wir nun eine *Zentralisator Koalgebra.* Zu $A \subseteq E$ setzt man dazu

$$L(A) := < xa - ax|\ x \in E,\ a \in A >,$$

wobei die spitzen Klammern das k-Modulerzeugnis bedeuten. Die Matrixspur $\mathrm{tr} : E \to k$ induziert einen k-linearen Isomorphismus φ von E nach E^*. Es gilt dann:

$$K(A) := \varphi(L(A))$$

ist ein Koideal in E^* und folglich

$$M(A) := E^*/K(A)$$

eine Matrix Koalgebra. Weiterhin gibt es stets einen natürlichen Isomorphismus von k-Algebren

$$M(A)^* \simeq C(A)$$

und einen natürlichen Homomorphismus von k-Moduln

$$M(A) \to C(A)^*,$$

der genau dann injektiv ist, wenn $M(A)$ torsionsfrei, und immer dann surjektiv ist, wenn $C(A)$ als k-Modul ein direkter Summand in E ist. Ist $M(A)$ ein projektiver k-Modul, so sind all diese Bedingungen erfüllt und zudem ist $C(A)$ endlich erzeugt. Man hat dann also eine induzierte Struktur als k-Koalgebra auf $C(A)^*$ und obiger natürlicher Homomorphismus ist ein Isomorphismus von k-Koalgebren. Dies zeigt, daß die Zentralisator Koalgebra $M(A)$ mehr (innerhalb der Kategorie der k-Moduln feststellbare) Information über A enthält als $C(A)$. Im übrigen ist $M(A)$ genau dann projektiver k-Modul, wenn für jede k-Algebra S, welche selbst ein Integritätsbereich ist, der natürliche Homomorphismus

$$S \otimes \mathrm{End}_A(V) \to \mathrm{End}_{S\otimes A}(S \otimes V)$$

ein Isomorphismus ist. Der in Analogie dazu existierende natürliche Homomorphismus

$$S \otimes M(A) \to M(S \otimes A)$$

ist übrigens stets ein Isomorphismus.

3 Matrix Bialgebren

Mittels der natürlichen Isomorphismen zwischen $\mathrm{End}_k(V)^{*\otimes r} = E^{*\otimes r}$ und $E_r^* := \mathrm{End}_k(V^{\otimes r})^*$ kann man die Tensoralgebra

$$\mathcal{T}(E^*) := \bigoplus_{r=0}^{\infty} E^{*\otimes r} \simeq \bigoplus_{r=0}^{\infty} E_r^*$$

als direkte Summe der universellen Matrix Koalgebren E_r^* vom Rang nr ansehen. Daraus erhält man eine k-Bialgebren Struktur auf $\mathcal{T}(E^*)$. Als Algebra ist $\mathcal{T}(E^*)$ bekanntlich frei auf den Erzeugern $t_{ij}, \quad i,j = i,\ldots,n$. Als Koalgebra ist es die direkte Summe der Koalgebren E_r^*, d.h. $\Delta := \oplus_{r\in\mathbb{N}}\Delta_r$ und $\epsilon := \oplus_{r\in\mathbb{N}}\epsilon_r$, wobei Δ_r die Komultiplikation (verknüpft mit der Inklusion von $E_r^* \otimes E_r^*$ in $\mathcal{T}(E^*) \otimes \mathcal{T}(E^*) = \oplus_{t\in\mathbb{N}}(\oplus_{u+v=t}E_u^* \otimes E_v^*)$) und ϵ_r die Koeins auf der universellen Matrix-Koalgebra E_r^* ist. Dabei ist die Koalgebrenstruktur auf $E_0^* = k$ gegeben durch $\Delta_0(1) = 1 \otimes 1$ und $\epsilon_0(1) = 1$.

Man verifiziert leicht, daß beide Strukturen miteinander verträglch sind, also tatsächlich eine graduierte Bialgebra vorliegt. Eine k-Bialgebra $\mathcal{M}$ zusammen mit einem Epimorphismus von k-Bialgebren $\tau : \mathcal{T}(E^*) \to \mathcal{M}$ nennen wir eine *Matrix Bialgebra vom Rang n*. $\mathcal{T}(E^*)$ selbst kann man somit als *universelle* oder (freie) Matrix Bialgebra vom Rang n ansehen. Ist der Kern von τ homogen, so ist $\mathcal{M}$ eine graduierte Matrix Bialgebra deren homogene Summanden Matrix Koalgebren sind.

Sei nun $\mathcal{A} := (A_r)_{r=2}^{\infty}$ eine Familie von Unteralgebren $A_r \subseteq \mathrm{End}_k(V^{\otimes r})$, so daß (unter natürlichen Isomorphismen) $\mathrm{id}_V \otimes A_r \subseteq A_{r+1}$ und $A_r \otimes \mathrm{id}_V \subseteq A_{r+1}$ gilt, und A_{r+1} als Algebra von diesen beiden Teilmengen erzeugt wird. Eine solche Familie ist durch A_2 vollständig bestimmt. Es ist dann

$$J(\mathcal{A}) := \bigoplus_{r=2}^{\infty} K(A_r)$$

ein homogenes, von $K(A_2)$ erzeugtes Biideal in $\mathcal{T}(E^*)$. Folglich erhält man eine graduierte Matrix Bialgebra

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}) := \mathcal{T}(E^*)/J(\mathcal{A}) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} M(A_r),$$

deren homogene Summanden gerade die Zentralisator Koalgebren $M(A_r)$ der A_r sind. Darin hat man $A_0 :=< \mathrm{id}_k >$ und $A_1 =< \mathrm{id}_V >$ zu setzen. Wir nennen diese Matrix Bialgebra die *(verallgemeinerte) FRT-Konstruktion* zu $\mathcal{A}$. Die im vorangegangenen Vortrag behandelte FRT-Konstruktion ist darin der Spezialfall, wo A_2 als Algebra von einem Element $\check{R}$ erzeugt wird. Wir schreiben für die entsprechende Familie $\mathcal{A}(\check{R})$. Mit der dortigen, bzw. der Notation aus [CP] gilt also

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}(\check{R})) = \mathcal{F}_R(M_n) = \mathcal{T}(E^*)/(\check{R}(T \odot T) - (T \odot T)\check{R}).$$

Ist beispielsweise in der klassischen Situation $\check{R} \in \mathrm{End}_k(V \otimes V)$ der Flip-Operator $\check{R}(v \otimes w) = w \otimes v$, so sind die Algebren A_r gerade die Bilder der Gruppenalgebra kS_r der symmetrischen Gruppe S_r unter der dadurch induzierten Darstellung auf dem r-fachen Tensorprodukt $V^{\otimes r}$ von V ($(i, i+1) \mapsto \mathrm{id}_{V^{\otimes i-1}} \otimes \check{R} \otimes \mathrm{id}_{V^{\otimes r-i-1}}$). In diesem Beispiel berechnet man leicht

$$K(A_2) =< t_{ij}t_{kl} - t_{kl}t_{ij} | \ i,j,k,l = 1,\ldots,n >$$

und folgert

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}(\check{R})) = k[t_{11}, t_{12}, \ldots, t_{nn}].$$

Dies ist gerade der Koordinatenring $k[M_n(k)]$ des Monoidschemas der $n \times n$-Matrizen über k. Die geordneten Monome darin bilden bekanntlich eine freie Basis. Insbesondere sind die Zentralisator

Koalgebren $M(S_r) := M(A_r)$ der symmetrischen Gruppen freie k-Moduln. Die dualen Algebren der $M(S_r)$ sind gerade die *Schur Algebren*

$$S(n,r) := M(S_r)^* \simeq \mathrm{End}_{S_r}(V^{\otimes r}).$$

In Analogie hierzu liefert der Quanten Yang Baxter Operator

$$\check{R}_A := q\sum_i e_{ij} \otimes e_{ji} + \sum_{i \neq j} e_{ij} \otimes e_{ji} + (q - q^{-1}) \sum_{i<j} e_{ii} \otimes e_{jj}$$

eine Darstellung der Hecke Algebra $\mathcal{H}_r$ vom Typ A auf den r-fachen Tensorprodukten von V. Dies liefert eine als k-Modul freie Matrix Bialgebra

$$k[M_{n,q}(k)] := \mathcal{M}(\mathcal{A}(\check{R}_A)),$$

die man somit als Koordinatenring eines Quanten Monoidschemas $M_{n,q}(k)$ interpretieren kann. Die dualen Algebren der homogenen Summanden $M(\mathcal{H}_r)$ sind nunmehr die q-Schur Algebren

$$S_q(n,r) := M(\mathcal{H}_r)^* \simeq \mathrm{End}_{\mathcal{H}_r}(V^{\otimes r}).$$

4 Orthogonale und symplektische Monoide

Für die Anwendungen auf orthogonale und symplektische Gruppen betrachten wir zunächst die klassische Situation über einem algebraisch abgeschlossener Körper K. Im Hinblick auf eine polynomiale Darstellungstheorie muß man zunächst algebraische Monoide $MO_n(K)$ bzw. $MSp_n(K)$ finden, welche die Rolle des Monoids $M_n(K)$ bei der generellen linearen Gruppe $GL_n(K)$ übernehmen. Diese Monoide treten als abgeschlossene Untermonoide des vollen Matrix-Monoids $M_n(K)$ über dem Körper K auf. Seien dazu $J_o, J_s \in V^{\otimes 2*}$ eine symmetrische bzw. schiefsymmetrische nichtentartete Bilinearform. Wir fixieren nun folgende Bezeichnungen:

$$\begin{array}{rcl}
O_n(K) & := & \{g \in GL_n(K) |\ J_o(gv, gw) = J_o(v,w)\ \forall v, w \in V\}, \\
Sp_n(K) & := & \{g \in GL_n(K) |\ J_s(gv, gw) = J_s(v,w)\ \forall v, w \in V\}, \\
\\
MO_n(K) & := & \{g \in M_n(K) |\ J_o(vg, wg) = J_o(gv, gw) = \mathrm{mp_o}(g) J_o(v,w)\ \forall v, w \in V\}, \\
MSp_n(K) & := & \{g \in M_n(K) |\ J_s(vg, wg) = J_s(gv, gw) = \mathrm{mp_s}(g) J_s(v,w)\ \forall v, w \in V\}, \\
\\
GO_n(K) & := & GL_n(k) \cap MO_n(K), \\
GSp_n(K) & := & GL_n(k) \cap MSp_n(K).
\end{array}$$

Darin sind $\mathrm{mp_o} : MO_n(K) \to K$ und $\mathrm{mp_s} : MSp_n(K) \to K$ geeignete Funktionen. Sie sind notwendigerweise regulär. Wir nennen $MO_n(K)$ bzw, $MSp_n(K)$ das *orthogonale bzw. symplektische Monoid* und $GO_n(K)$ bzw. $GSp_n(K)$ die Gruppe der *orthogonalen bzw. symplektischen Ähnlichkeiten.*

Es ist zu erwarten, daß $MO_n(K)$ bzw. $MSp_n(K)$ mit dem Zariski-Abschluß von $GO_n(K)$ bzw. $GSp_n(K)$ in $M_n(K)$ zusammenfällt, und tatsächlich läßt sich dies für einen Körper der Charakteristik Null zeigen. In positiver Charakteristik scheint der Sachverhalt bislang nicht geklärt zu sein.

Wir wenden nun die im vorigen Abschnitt betrachtete FRT-Konstruktion in einem Fall an, wo die Algebra A_2 von zwei Operatoren $\check{R}$ und $\check{E}$ erzeugt wird. Dabei ist ersterer obiger Flip-Operator und letzterer durch

$$\check{E}_o = \sum_{1\leq i,j\leq n} e_i^{j'} \otimes e_{i'}^{j} \quad \text{im Fall der orthogonalen, und}$$

$$\check{E}_s = \sum_{1\leq i,j\leq n} \epsilon_i\epsilon_j e_i^{j'} \otimes e_{i'}^{j} \quad \text{im Fall der symplektischen Monoide}$$

gegeben. Darin ist $i' := n-i+1$ für $i = 1,\ldots,n$. Wir schreiben wieder $\mathcal{A}(\check{R},\check{E})$ für die zugehörige Familie von Algebren. Für einen beliebigen Integritätsbereich k ist dann durch

$$k[MO_n(k)'] := \mathcal{M}(\mathcal{A}(\check{R},\check{E}_o)) \text{ bzw. } k[MSp_n(k)'] := \mathcal{M}(\mathcal{A}(\check{R},\check{E}_s))$$

ein Monoidschema über k gegeben. Es scheint bislang nicht klar zu sein ob im Fall $k = \mathbb{Z}$ die $\mathbb{Z}$-Moduln $\mathbb{Z}[MO_n(\mathbb{Z})']$ und $\mathbb{Z}[MSp_n(\mathbb{Z})']$ frei sind, noch ob für einen algebraisch abgeschlossenen Körper K positiver Charkteristik $K[MO_n(K)'] \simeq K[MO_n(K)]$ bzw. $K[MSp_n(K)'] \simeq K[MSp_n(K)]$ gilt. In Charakteristik Null kann dies wiederum bestätigt werden. Jedenfalls hat man stets einen Epimorphismus von links nach rechts, dessen Kern eventuell jedoch nilpotente Elemente enthalten könnte. Man beachte, daß man sich auf die Standardformen $J_o := \sum_{i=1}^n x_i^* \otimes x_{i'}^*$ und $J_s := \sum_{i=1}^m x_i^* \otimes x_{i'}^* - x_{i'}^* \otimes x_i^*$ (mit $n = 2m$) beschränken kann. Außerdem sei bemerkt, daß zufolge der letzten Bemerkung im 2. Abschnitt $K \otimes \mathbb{Z}[MO_n(\mathbb{Z})'] \simeq K[MO_n(K)']$ und $K \otimes \mathbb{Z}[MSp_n(\mathbb{Z})'] \simeq K[MSp_n(K)']$ gilt.

In Analogie zum $GL_n(k)$-Fall und den symmetrischen Gruppen S_r ist hier durch die Operatoren $\check{R}$ und $\check{E}$ eine Darstellung der *Brauer Algebra* $BR_{r,x}$ (über k, für $x = n$ im Fall der orthogonalen und $x = -n$ im Fall der symplektischen Gruppen) auf den r-fachen Tensorprodukten von V gegeben. Durch die Darstellungen der orthogonalen bzw. symplektischen Gruppen auf $V^{\otimes r}$ sind Algebrenhomomorphismen von den Gruppenalgebren $kO_n(k)$ bzw. $kSp_n(k)$ nach $\mathrm{End}_{BR_{r,x}}(V^{\otimes r})$ gegeben. Für einen Körper der Charakteristik Null folgt aus der Arbeit von Brauer ([Br]), daß diese surjektiv sind. Falls sich dies auch in positiver Charakteristik bestätigen sollte, könnten die oben erwähnten Ungeklärtheiten ausgeräumt werden.

Anwendung von Abschnitt 3 zeigt somit, daß die homogenen Summanden der graduierten Matrix Bialgebren $k[MO_n(k)']$ und $k[MSp_n(k)']$ gerade die Zentralisator Koalgebren $M(BR_{r,x})$ sind. Deren duale Algebren sind mithin Kandidaten für orthogonale und symplektische Schur Algebren. Gemäß den Ausführungen in 2 sind sie isomorph zu $\mathrm{End}_{BR_{r,x}}(V^{\otimes r})$. Ob sie allerdings auch in positiver Charakteristik mit den von Donkin [Do] definierten Schur Algebren übereinstimmen hängt von der Klärung obiger Fragen ab.

5 Quantisierung der orthogonalen und symplektischen Monoide

Die Quantisierung der Koordinatenringe $k[MO_n(k)']$ und $k[MSp_n(k)']$ erfolgt nun in Analogie zur Quantisierung von $k[M_n(k)]$ durch Quanten Yang-Baxter Operatoren

$$\check{R}_B := q\sum_{i\neq m+1} e_{ii}\otimes e_{ii} + q^{-1}\sum_{i\neq m+1} e_{ii'}\otimes e_{i'i}) + q\sum_{i\neq j,j'} e_{ij}\otimes e_{ji} +$$

$$+(q-q^{-1})\sum_{i<j}(e_{ii}\otimes e_{jj} - \bar{q}^{\tau_j-\tau_i} e_{ij'}\otimes e_{i'j}) + e_{(m+1)(m+1)}\otimes e_{(m+1)(m+1)},$$

$$\check{R}_C := q\sum_{i} e_{ii}\otimes e_{ii} + q^{-1}\sum_{i} e_{ii'}\otimes e_{i'i}) + q\sum_{i\neq j,j'} e_{ij}\otimes e_{ji} +$$

$$+(q-q^{-1})\sum_{i<j}(e_{ii}\otimes e_{jj}-q^{\rho_j-\rho_i}\epsilon_i\epsilon_j e_{ij'}\otimes e_{i'j}),$$

$$\check{R}_D := q\sum_i e_{ii}\otimes e_{ii}+q^{-1}\sum_i e_{ii'}\otimes e_{i'i})+q\sum_{i\neq j,j'} e_{ij}\otimes e_{ji}+$$

$$+(q-q^{-1})\sum_{i<j}(e_{ii}\otimes e_{jj}-q^{\lambda_j-\lambda_i}e_{ij'}\otimes e_{i'j}),$$

Darin sind $q,\bar{q}$ invertierbare Elemente in k mit $\bar{q}^2 = q$ und $(\tau_1,\dots,\tau_n) := (2m-1, 2m-3,\dots,1,0,-1,\dots,-(2m-3),-(2m-1))$, $(\rho_1,\dots,\rho_n) := (m, m-1,\dots,1,-1,\dots,-(m-1),-m)$, $\epsilon_i := sign(\rho_i)$ und $\lambda_i := \rho_i-\epsilon_i$ sowie $n = 2m+1$ im Fall B und $n = 2m$ in den beiden anderen Fällen.

Für einen Körper k und $(1+q^2)(1-q^{-n})(1+q^{2-n}) \neq 0$ bzw. $(1+q^2)(1+q^{-n})(1-q^{-2-n}) \neq 0$ besitzen die drei Yang-Baxter Operatoren Minimalpolynome dritten Grades:

$$(t+q^{-1})(t-q)(t-q^{1-n})$$

im Fall B, D, sowie

$$(t+q^{-1})(t-q)(t+q^{-1-n})$$

im Fall C.

Für $q = 1 = \bar{q}$ spezialisieren alle drei zu dem Flip-Operator $\check{R}$. Die FRT-Konstruktionen $\mathcal{F}_{R_X}(M_n) = \mathcal{M}(\mathcal{A}(\check{R}_X))$ für $X = B, C, D$ spezialisieren daher für $q \mapsto 1$ alle drei zu $k[M_n(k)]$. Allerdings sind diese über dem lokalen Ring $k = \mathbb{Z}[q,q^{-1}]_{(q-1)}$ (bzw. $k = \mathbb{Z}[\bar{q},\bar{q}^{-1}]_{(\bar{q}-1)}$ im Fall B) keine freien k-Moduln. Um dies zu erreichen hat man auch die den Operatoren $\check{E}_o$ und $\check{E}_s$ entspechenden Quanten Operatoren heranzuziehen:

$$\check{E}_B := \sum_{1\le i,j\le n}\bar{q}^{\tau_j-\tau_i}e_{ij'}\otimes e_{i'j},\quad \check{E}_D := \sum_{1\le i,j\le n} q^{\lambda_j-\lambda_i}e_{ij'}\otimes e_{i'j}.$$

$$\check{E}_C := \sum_{1\le i,j\le n} q^{\rho_j-\rho_i}\epsilon_i\epsilon_j e_{ij'}\otimes e_{i'j},$$

In Analogie zum vorigen Paragraphen betrachtet man dann die Matrix Bialgebren

$$\begin{array}{rcll} k[MO_{n,q}(k)'] & := & \mathcal{M}(\mathcal{A}(\check{R}_B,\check{E}_B)) & \text{für ungerades n}\\ k[MO_{n,q}(k)'] & := & \mathcal{M}(\mathcal{A}(\check{R}_D,\check{E}_D)) & \text{für gerades n}\\ k[MSp_{n,q}(k)'] & := & \mathcal{M}(\mathcal{A}(\check{R}_C,\check{E}_C)) & \text{für gerades n}\end{array}$$

Die Bezeichnungen sind dadurch gerechtfertigt, daß diese Bialgebren als Moduln über den oben betrachteten lokalen Ringen frei sind, und sich bei Spezialisierung $q \mapsto 1$ gerade $k[MO_n(k)']$ bzw. $k[MSp_n(k)']$ ergibt. Ist q^2-1 invertierbar in k so gilt

$$\check{E}_X = (q-q^{-1})^{-1}(\check{R}_X^{-1}-\check{R}_X)+\mathrm{id}_{V^{\otimes 2}}$$

für $X = B, C, D$ und es folgt $\mathcal{M}(\mathcal{A}(\check{R}_X,\check{E}_X)) = \mathcal{M}(\mathcal{A}(\check{R}_X))$. Hierin äußert sich ein bemerkenswerter Unterschied zwischen der quantisierten und der klassischen Situation. Während im letzteren Fall, die Relationen, welche für die Kommutativität der Koordinatefunktionen sorgen, unabhängig von denjenigen sind, welche die Invarianz der Bilinearform erzwingen, sind im ersteren Fall diese beiden Sorten von Relationen aneinander gekoppelt. Hiermit scheinen auch die Schwierigkeiten zusammen zuhängen, orthogonale und symplektische Quantengruppen als Untergruppen einer generellen linearen Quantengruppe aufzufassen ([T1]).

Als invariante Bilinearform in $(V \otimes V)^* \simeq V^* \otimes V^*$ hat man

$$J_B := \sum_{i=1}^{n} \bar{q}^{-\tau_i} x_i^* \otimes x_{i'}^*, \quad J_C := \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i q^{-\rho_i} x_i^* \otimes x_{i'}^*, \quad J_D := \sum_{i=1}^{n} q^{-\lambda_i} x_i^* \otimes x_{i'}^*$$

zu betrachten. Dual dazu gibt es invariante 2-fach Tensoren in $V^{\otimes 2}$

$$J_B' := \sum_{i=1}^{n} \bar{q}^{-\tau_i} x_i \otimes x_{i'}, \quad J_C' := \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i q^{-\rho_i} x_i \otimes x_{i'}, \quad J_D' := \sum_{i=1}^{n} q^{-\lambda_i} x_i \otimes x_{i'}$$

Es gilt dann $\check{E}_X(v \otimes w) = J_X(v \otimes w)J_X'$ für $X = B, D$ bzw. $\check{E}_C(v \otimes w) = -J_C(v \otimes w)J_C'$.

Die Rolle der Brauer Algebra $BR_{r,x}$ wird hier durch die *Birman-Murakami-Wenzl Algebra* $BMW_{r,q,x}$ für $x = [n-1]_q + 1$ im Fall der orthogonalen und $x = [-n-1]_q + 1$ im Fall der symplektischen Gruppen übernommen (mit $[n]_q$ wird das q-Analog einer ganzen Zahl n bezeichnet). Wie schon bei der Brauer Algebra soll auch hier auf eine nähere Betrachtung dieser Algebren verzichtet werden. Es sei nur darauf hingewiesen, daß sie in der Literatur (z.B. [BW], [CP]) in der Regel für invertierbares $q^2 - 1$ definiert werden. Die Brauer Algebren $BR_{r,x}$ treten dann als Limes für $q \to 1$ auf. Diesem Umstand begegnet man, in dem man die Birman-Murakami-Wenzl Algebren über dem Ring $\mathbb{Z}[x, q, q^{-1}, z, z^{-1}]/(z^2 + (q^2-1)(x-1)z - q^2)$ betrachtet. Die Brauer Algebren erhält man dann durch Spezialisierung $q \mapsto 1$.

In Analogie zur Schlußbemerkung in Abschnitt 4 folgt, daß die homogenen Summanden der graduierten Matrix Bialgebren $k[MO_{n,q}(k)']$ und $k[MSp_{n,q}(k)']$ gerade die Zentralisator Koalgebren $M(BMW_{r,q,x})$ sind. Deren duale Algebren sind mithin Kandidaten für orthogonale und symplektische q-Schur Algebren. Gemäß den Ausführungen in 2 sind sie isomorph zu $\mathrm{End}_{BMW_{r,q,x}}(V^{\otimes r})$.

6 Von Quantenmonoiden zu Quantengruppen

Es soll nun noch in aller Kürze aufgezeigt werden, wie man Quantengruppen als offene bzw. abgeschlossene Untermonoide der oben eingeführten Quantenmonoide gewinnt. Eine besondere Rolle spielen dabei *gruppenähnliche Elemente* in den Matrix Bialgebren $k[M_{n,q}(k)]$, $k[MO_{n,q}(k)']$ und $k[MSp_{n,q}(k)']$. Die Vorgehensweise, wie sie im ersten Fall angewandt wird, wurde bereits im Vortrag von Robert Boltje in allgemeiner Formulierung besprochen. In diesem Fall ist das gruppenähnliche Element die *Quantendeterminante* qdet. Im Fall der orthogonalen und symplektischen Gruppen betrachtet man die q-Analoge $\mathrm{qmp_o}$ und $\mathrm{qmp_s}$ zu den Funktionen $\mathrm{mp_o}$ und $\mathrm{mp_s}$.

Gruppenähnliche Elemente einer Bialgebra sind solche, für die $\Delta(x) = x \otimes x$ und $\epsilon(x) = 1$ gilt. Die Definition zeigt sofort, daß für gruppenähnliche Elemente x der k-lineare Aufspann von x ein eindimensionaler Unterkomodul des links- und des rechtsregulären Komoduls ist. Umgekehrt führt jeder eindimensionale rechts (bzw. links) Komodul $W =< w >$ durch $\tau_W(w) = w \otimes x$ (bzw. $\tau_W(w) = x \otimes w$) zu einem gruppenähnlichen Element x.

Wie im vorherigen Vortrag aufgezeigt, kommt die Quantendeterminante von dem eindimensionalen Komodul $\Lambda^n_{R_A,q}$. Die Resultate dieses Vortrags sind anwendbar, da R_A die Frobenius-Hecke Bedingungen erfüllt. Wie die Minimalpolynome der Yang-Baxter Operatoren R_X für $X = B, C, D$ zeigen, erfüllen diese jedoch nicht die Hecke-Bedingung. Es sei hier nur bemerkt, daß man dennoch auch in diesen Fällen eine symmetrische und äußere Algebra definieren kann (siehe [H2]). Diese sind zwar auch Deformationen der klassischen symmetrischen und äußeren Algebra, doch unterscheiden sich die Relationen von denen im Fall $M_{n,q}(k)$.

Explizit schreiben sich die Elemente $\mathrm{qdet}, \mathrm{qmp_o}$ und $\mathrm{qmp_s}$ wie folgt:

$$\mathrm{qdet} \;=\; \sum_{w\in S_n}(-q)^{-l(w)} t_{1w(1)}t_{2w(2)}\cdots t_{nw(n)}$$

$$\begin{array}{lcll} \mathrm{qmp_o} & = & \sum_{i=1}^{n} \bar{q}^{-\tau_i} t_{1i}\otimes t_{ni'} & \text{für ungerades n,} \\ \mathrm{qmp_o} & = & \sum_{i=1}^{n} q^{-\lambda_i} t_{1i}\otimes t_{ni'} & \text{für gerades n,} \\ \mathrm{qmp_s} & = & \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i q^{-\rho_i} t_{1i}\otimes t_{ni'}. & \end{array}$$

Darin ist $l(w)$ die Länge der Permutation w. Die Elemente $\mathrm{qmp_o}$ und $\mathrm{qmp_s}$ kommen natürlich von den eindimensionalen, von J'_X $(X = B, D, C)$ erzeugten Unterkomoduln von $V^{\otimes 2}$. In allen Fällen sind die betrachteten Elemente zentral in der jeweiligen Bialgebra. Es sei jedoch bemerkt, daß für die Multiparameterversionen der Quanten Yang-Baxter Operatoren $\check{R}_X$ und die dazu gehörigen multiparametrischen Matrix-Bialgebren dies nicht mehr erfüllt ist. Es sind jedoch stets die schon im letzten Vortrag erwähnten *Ore Bedingungen* erfüllt, auf Grund derer an den Elementen qdet, $\mathrm{qmp_o}$ und $\mathrm{qmp_s}$ lokalisiert werden kann. Z.B. hat man bei der in [DD] betrachteten Spezialisierung der multiparametrischen Quanten GL_n die Vertauschungsrelationen

$$t_{ij}\mathrm{qdet} = q^{2(i-j)}\mathrm{qdet}t_{ij}.$$

Man kann nun folgende Quanten Koordinatenringe definieren:

$$\begin{array}{rcc} k[GL_{n,q}(k)] & := & k[M_{n,q}(k)]_{\mathrm{qdet}} \\ k[GO_{n,q}(k)'] & := & k[MO_{n,q}(k)']_{\mathrm{qmp_o}} \\ k[GSp_{n,q}(k)'] & := & k[MSp_{n,q}(k)']_{\mathrm{qmp_s}} \\ & & \\ k[SL_{n,q}(k)] & := & k[M_{n,q}(k)]/(\mathrm{qdet}-1) \\ k[O_{n,q}(k)'] & := & k[MO_{n,q}(k)']/(\mathrm{qmp_o}-1) \\ k[Sp_{n,q}(k)'] & := & k[MSp_{n,q}(k)']/(\mathrm{qmp_s}-1) \\ & & \\ k[SO_{n,q}(k)'] & := & k[MO_{n,q}(k)']/(\mathrm{qmp_o}-1, \mathrm{qdet}-1) \end{array}$$

In den ersten drei Fällen erhält man offene, in den übrigen vier Fällen abgeschlossene Untermonoide. Im Hinblick auf die Multiparameterversionen ist die Konstruktion der abgeschlossenen Gruppen nur unter gewissen Einschränkungen der Parametermenge möglich und zwar unter solchen, für die qdet, $\mathrm{qmp_o}$ und $\mathrm{qmp_s}$ zentral sind (siehe [H2]).

Der Strich im Fall der orthogonalen und symplektischen Gruppen und Ähnlichkeitsgruppen soll wiederum an die im 4. Abschnitt angesprochene Unsicherheit im Bezug auf positive Charakteristik andeuten. Enthält k den Körper der rationalen Zahlen, so kann der Strich weggelassen werden. In diesem Fall handelt es sich dann auch um Deformationen der Koordinatenringe der entsprechenden klassischen Gruppen. Andernfalls verbleiben auch hier Unsicherheiten (siehe [H1], S.79).

Literatur

[AST] Artin, M., Schelter, W., Tate, J.: Quantum Deformations of GL_n. Comm. Pure Appl. Math. 44 (1991), 879-95

[BW] Birman, J., Wenzl. H,: Braids, Link Polynomials and a new Algebra. Tansactions of the Amer. Math. Soc., Vol. 313, No. 1 (1989), 249-273.

[Br] Brauer, R.: On Algebras which are connected with the semisimple continous Groups. Annals of Math. Vol. 38, No. 4 (1937), 857-871.

[CP] Chari, V., Pressley, A.: A Guide to Quantum Groups. Cambridge University Press. 1994. 651 S.

[DD] Dipper, R., Donkin, S.: Quantum GL_n. Proc. London Math. Soc. 63 (1991), 165-211.

[Do] Donkin, S.: On Schur Algebras and Related Algebras, I, Journal of Algebra 104 (1986), 310-328.

[H1] Hayashi, T.: Quantum Deformation of Classical Groups. Publ. RIMS, Kyoto Univ. 28 (1992), 57-81.

[H2] Hayashi, T.: Quantum Groups and Quantum Determinants. J. of Algebra 152 (1992), 146-165.

[Ka] Kassel, C.: Quantum Groups, GTM 155, Springer 1995, 531 S.

[Su] Sudbery, A.: Matrix-Element Bialgebras Determined by Quadratic Coordinate Algebras. J. of Algebra, Vol 158, (1993), 375-399

[T1] Takeuchi, M.: Quantum Orthogonal and Symplectic Groups and their Embedding into Quantum GL. Proc. Japan Acad., Vol. 65, Ser. A, No. 2 (1989), 55-58.

[T2] Takeuchi, M.: Matric Bialgebras and Quantum Groups. Israel J. of Math., Vol. 72, Nos. 1-2, (1990), 232-251.