Klassifikation der algebraischen Flächen vierter Ordnung, die eine einparametrige Familie von Kegelschnitten besitzen

Zulassungsarbeit von Sebastian Oehms

Themenstellung: Prof. Dr. W. Degen, Mathematisches Institut B,
Universität Stuttgart.

Tag der Einreichung: 12.1.1990

Vorwort

Als Erster beschäftigte sich *E. Kummer* [14] im Jahr 1865 mit algebraischen Flächen vierter Ordnung im dreidimensionalen projektiven Raum, welche die Eigenschaft besitzen, daß es zu ihnen eine einparametrige Familie von Kegelschnitten gibt, deren sämtliche Elemente in der Fläche enthalten sind. Es folgten Abhandlungen von *C.M. Jessop* [12] (1916) und *W.F. Meyer* [15] (1921-34). Abgesehen von etlichen Ergänzungen werden hier die Betrachtungen der erstgenannten Arbeit wiedergegeben. Sowohl in Bezug auf die Resultate, als auch hinsichtlich der Argumentation bleiben in allen drei Arbeiten zum Teil wesentliche Fragen offen. Beispielsweise erfährt man dort nicht, ob die angegebenen Typen von Flächen auch tatsächlich alle in Frage stehenden umfassen. Um so erstaunlicher ist es, daß unter den von Kummer angegebenen Flächen nur zwei Typen der fraglichen Quartiken fehlen (wie sich hier herausstellen wird), deren erster in der Abhandlung von Meyer, der zweite hingegen in der von Jessop hinzugefügt wird und die hier mit (j1) bzw. (j2) bezeichnet werden.

Die Schwierigkeiten beim Lesen der damaligen Arbeiten entstehen insbesondere durch die Verwendung einiger Begriffe in wechselnden Bedeutungen, aber auch dadurch, daß bei anstehenden Fallunterscheidungen häufig nur ein sogenannter 'allgemeiner' oder 'bemerkenswerter' Fall behandelt wird. Der Leser bleibt dann in der Fülle der zwar 'uninteressanteren', aber dafür oft schwierigeren Fälle, alleine zurück. Von der unpräzisen Begriffsverwendung ist hier besonders die im Fall des Wortes *Kegelschnitt* bedeutsam. Generell wurden darunter wohl eindimensionale *Zykel* vom Grad zwei verstanden (entsprechend der hier verwendeten Definition in Paragraph 2.1). Häufig wird der Begriff jedoch als Synonym für eine irreduzible eindimensionale *Varietät* (Kurve) vom Grad zwei gebraucht. Das ist natürlich kein Wunder, da die Notwendigkeit, begrifflich zwischen Varietäten und Zykeln zu unterscheiden, damals noch nicht eingesehen wurde. Es wird nicht einmal klar, ob Kummers Zielsetzung in [14] von der ersten oder der zweiten Interpretation des Wortes Kegelschnitt ausgeht. Seine Bemerkung, wonach alle *Regelflächen* vierter Ordnung eine einparametrige Familie von Kegelschnitten tragen (S.76), legt die erste Auffassung nahe. Allerdings ist dann fraglich, warum er nicht zu dem Satz gelangt, daß zu allen Quartiken mit einer Kurve singulärer Punkte stets eine solche Familie existiert (vgl. Zusammenfassung der vorliegenden Arbeit). Außerdem geht er in seiner

Argumentation stets von vier verschiedenen Singularitäten der Schnittkurven zwischen der Fläche und denjenigen Ebenen, welche die Kegelschnitte der Familie enthalten (hier *Trägerebenen* genannt) aus, woraus man schliessen kann, daß er hierbei an zwei irreduzible Kurven zweiter Ordnung gedacht haben muß, die sich nicht berühren. Wie dem auch sei, in der vorliegenden Abhandlung sollen Kegelschnitte jedenfalls stets in der zuletzt genannten Weise, also als irreduzible Kurven, aufgefaßt werden. Daher sind die Regelflächen hier ausführlicher zu untersuchen als von Kummer. In Paragraph 2.5 werden zu diesem Zweck die theoretischen Hilfsmittel bereitgestellt. Es stellt sich dann tatsächlich heraus, daß etliche Typen von Regelflächen überhaupt keine Kegelschnitte enthalten (was im Fall der Kegel natürlich einfach einzusehen ist).

Die heikelste, bei Kummer, Jessop und Meyer offengebliebene Frage, ließ sich nach langem Bemühen schließlich auf relativ einfache Weise mit Hilfe der Vorbereitungen aus Paragraph 2.4 lösen. Es handelt sich um Folgendes: Da Kummer in seiner Argumentation stets vier Singularitäten auf den Schnittkurven zwischen Trägerebenen und Quartik (s.o.) annimmt, gelangt er auch stets zu Flächen, die eine Kurve singulärer Punkte enthalten. Die beiläufige Entdeckung von Flächen des Interessenbereichs mit nur isolierten Singularitäten ([15, S.1572], [12, S.134]) (hier: Typ (j1) und (j2)), hätte Meyer und Jessop eigentlich stutzig machen müssen, denn hier haben alle Schnittkurven nur zwei bzw. einen singulären Punkt. Nimmt man die Fälle, wo es stets nur ein bzw. zwei Singularitäten auf den Schnittkurven gibt, in die Untersuchung auf, so ist zunächst nicht klar, warum es sich bei diesen auch gleichzeitig um Singularitäten der Fläche handeln muß. Es ist nämlich durchaus in Betracht zu ziehen, daß die Singularitäten durch eine Berührung der Trägerebenen verursacht werden, so daß sogar singularitätenfreie Flächen vierter Ordnung mit einparametriger Kegelschnittfamilie denkbar wären. Möglicherweise waren den Autoren Kummer, Jessop und Meyer die Fakten, welche diese Annahme widerlegen und hier in Paragraph 2.4 erarbeitet werden, intuitiv oder aus Erfahrung so offensichtlich, daß nicht einmal diese Annahme zu Papier gebracht wurde. Die Lücke wird hier in Paragraph 3.1 geschlossen, wodurch eine vollständige Klassifikation aller Quartiken des Interessenbereichs erreicht wird. Darüberhinaus ist es sogar in den meisten Fällen möglich, sämtliche Kegelschnitte auf der Fläche zu ermitteln. Besonders nützlich ist dabei die Untersuchungsmethode von *C. Segre* ([18]), die in Paragraph 3.4 erläutert wird.

Wie in der damaligen Zeit üblich, arbeiteten Kummer, Jessop und Meyer über dem *Körper der komplexen Zahlen*. Diese Vorgabe konnte hier zu einem *algebraisch abgeschlossenen Körper der Charakteristik Null* abgeschwächt werden. Die Ersetzung der klassischerweise üblichen transzendenten Argumentationsmethoden durch algebraische ist weitgehend durch die *moderne Algebraische Geometrie* vollzogen worden. Häufig muß man hierzu einen aufwendigen algebraischen Begriffsapparat verwenden. Nicht nur, um den Umfang der Arbeit in

Grenzen zu halten, sondern auch um der Ausarbeitung einen mehr geometrischen als algebraischen Charakter zu verleihen, sind daher die grundlegenden Sätze der modernen Theorie lediglich unter Verweis auf Literatur in Kapitel 1 angegeben. Die Voraussetzung über die Körpercharakteristik geht primär in den Sätzen 1.4.1, 1.6.2 aber auch in Lemma 2.1.2 und Satz 2.6.1 ein.

Ein wesentliches Hilfsmittel der Geometer des letzen Jahrhunderts bestand in der Betrachtung von *'Reziproken Flächen'* oder — wie man heute sagt — *Dualen Varietäten*. Diese geometrisch naheliegenden Objekte finden in der modernen Behandlung der Algebraischen Geometrie nur zögernd Beachtung. Für viele Überlegungen dieser Arbeit sind sie jedoch unentbehrlich. Die wesentlichen diesbezüglichen Sachverhalte sind den Arbeiten [13] und [11] entnommen und wurden in Paragraph 1.6 angegeben. In diesem Zusammenhang ist auch auf die durchgehend verwendete Bezeichnungsweise für Teilmengen des *Dualraums* $\mathbb{P}^{n\vee}$, die stets mit einem $\vee$ oben indiziert werden, hinzuweisen. Falls es sich bei der Teilmenge um eine projektive Varietät handelt, kann man sie als duale Varietät einer projektiven Varietät des $\mathbb{P}^n$ ansehen und wir werden letztere stillschweigend durch das gleiche Symbol jedoch ohne $\vee$ bezeichnen.

Der Begriff der *Familie von Kurven* oder *stetigen Kurvenschar*, wie es damals oft hieß, ist auf klassische Weise ebenfalls differentialgeometrisch gefaßt worden. Die moderne Algebraische Geometrie hat als Ersatz den Begriff der *algebraischen Familie von Varietäten* (aber auch andere) zur Verfügung. Von besonderem Interesse sind unter diesen speziell *lineare Kurven–Systeme*. Was über diese Begriffe für die hiesigen Zwecke auf theoretischer Ebene darzulegen ist, findet man in den Paragraphen 2.2 und 2.3. Zuvor werden die *Chow–Varietäten* behandelt, die gewissermaßen universelle Parametervarietäten für algebraische Familien von Varietäten darstellen. Einparametrige algebraische Familien von Kegelschnitten des $\mathbb{P}^3$ entsprechen damit Kurven auf der achtdimensionalen Chow–Varietät $C_{1,2}(\mathbb{P}^3)^{irr}$, deren Punkte in eineindeutiger Weise zu den Kegelschnitten des $\mathbb{P}^3$ gehören (ähnlich wie die Punkte der Plückerquadrik zu den Geraden).

Die Ergebnisse der Klassifikation sind in Kapitel 4 zusammengefaßt, wo auch Gleichungsdarstellungen für die betreffenden Flächen zu finden sind.

Zum Gelingen dieser Arbeit möchte ich mich recht herzlich bei all denen bedanken, die dazu beigetragen haben. Dabei ist zunächst *Prof. Dr. W. Degen* zu nennen, dem mein Dank für die interessante Aufgabenstellung, sowie für Hilfestellungen bei der Bewältigung der Kernfragen gilt. *Dr. M. Oehler* unterstützte mich durch Anregungen nach der Durchsicht des Manuscripts. Mit Verständnisfragen schema– und garbentheoretischer Natur konnte ich mich freundlicherweise auch an *Prof. P. Slodowy* wenden. Nicht zuletzt gilt mein Dank all jenen Kommilitonen, die dazu beigetragen haben, daß meine Arbeit nun in leserlicher

Form vorliegt. Insbesondere möchte ich dabei *Hartmut Holzwart* nennen, der mir mit viel Geduld bei der Korrektur der Arbeit geholfen hat.

Hiermit erkläre ich, daß ich die Arbeit selbständig und nur mit den angegebenen Hilfsmitteln angefertigt habe und daß alle Stellen, die im Wortlaut oder dem Sinn nach anderen Werken entnommen sind, durch Angabe der Quellen als Entlehnungen kenntlich gemacht worden sind.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundbegriffe

Um mit den verwendeten Notationen und Generalvoraussetzungen vertraut zu machen, wird ein kurzer Blick auf die fundamentalen Begriffe der algebraischen Geometrie geworfen.

1.1 Varietäten

Die hier betrachteten geometrischen Objekte sind stets als eingebettet in einen *n–dimensionalen projektiven Raum* $\mathbb{P}_k^n$ über einem *algebraisch abgeschlossenen Körper k* der *Charakteristik Null* aufzufassen. Der Körper k ist durchgehend fest gewählt, so daß er in der Regel wieder aus der Bezeichnung entfernt wird. Zur Vermeidung von Umständlichkeiten werden Punkte $x \in \mathbb{P}^n$ und Koordinatenvektoren $x = (x_0, \ldots, x_n)$ durch gleiche Symbole geschrieben. In Kapitel 3 werden wir das zugrunde liegende Koordinatensystem häufig wechseln. Ein solches ist durch $n+1$ linear unabhängige Punkte (Grundpunkte des Koordinatensystems oder kurz: *Koordinatengrundpunkte*), welche wir stets durch $A_0, \ldots, A_n$ bezeichnen, zuzüglich eines weiteren, von keinen n der $A_0, \ldots, A_n$ linear abhängigen Punktes, den wir *Normierungspunkt* des Koordinatensystems nennen, festgelegt. Die Punkte $A_0, \ldots, A_n$ besitzen die Einheitsvektoren als Koordinatenvektoren.

Ist $T \subseteq k[x_0, \ldots, x_n]$ eine Menge homogener Polynome in x, so bezeichnen wir die *Nullstellenmenge von T* durch

$$V(T) := \{x \in \mathbb{P}^n \mid f(x) = 0 \; \forall f \in T\}$$

(für $T = \{f\}$ auch kurz: $V(f)$). Ist umgekehrt $X \subseteq \mathbb{P}^n$, so erzeugt die Menge

$$T := \{f \in k[x_0, \ldots, x_n] \mid f \text{ homogen} \wedge f(x) = 0 \; \forall x \in X\}$$

ein Ideal, welches mit $I(X)$ bezeichnet wird und welches homogen ist, d.h. $I(X)$ enthält mit jedem Polynom f alle homogenen Bestandteile desselben. Wir nennen $I(X)$ *homogenes Ideal von* X.

Die Räume $\mathbb{P}^n$ sind mit einer Topologie, der *Zariski-Topologie*, ausgestattet, deren abgeschlossene Mengen gerade solche der Form $V(T)$ für eine Menge $T \subseteq k[x_0, \ldots, x_n]$ homogener Polynome sind. Wenn nicht ausdrücklich etwas anderes vermerkt wird, sind alle topologischen Begriffe bezüglich der Zariski-Topologie aufzufassen.

Definition (Varietät): Eine nichtleere Teilmenge $X \subseteq \mathbb{P}^n$, versehen mit der Spurtopologie der Zariski-Topologie heißt eine *Varietät* genau dann, wenn X offen in $\overline{X}$ (Abschluß von X in $\mathbb{P}^n$) ist. In den Fällen, wo a) $X = \overline{X}$, b) $X = \overline{X} \backslash H$ (mit einer Hyperebene $H \subset \mathbb{P}^n$) oder c) $X \subseteq \overline{X} \backslash H$ gilt, heißt X auch a) *projektive*, b) *affine* oder c) *quasiaffine* Varietät.

Die Definition richtet sich nach Shafarevich [21] und unterscheidet sich von der bei Hartshorne [10] gegebenen durch den Verzicht auf die *Irreduzibilität* von X. Ein topologischer Raum heißt *irreduzibel* wenn aus jeder Zerlegung $X = X_1 \cup X_2$ mit abgeschlossenen Mengen $X_1, X_2 \subseteq X$ $X_1 = X$ oder $X_2 = X$ folgt, oder — äquivalent — wenn jede offene nichtleere Teilmenge von X dicht in X liegt. Andernfalls heißt X *reduzibel*.

Die Eigenschaft von $k[x_0, \ldots, x_n]$, ein noetherscher Ring zu sein, liefert zu jeder Varietät X eine eindeutige Zerlegung in abgeschlossene *irreduzible Komponenten* $X = X_1 \cup \ldots \cup X_r$ ($r \in \mathbb{N}$), in der für $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ und $i \neq j$ $X_i \not\subseteq X_j$ gilt ([10, S.5]).

Als *Dimension* ($\dim X$) einer irreduziblen Varietät X bezeichnet man die eindeutig bestimmte Maximalzahl von abgeschlossenen irreduziblen Untervarietäten, die eine beliebige Kette $X = X_r \supset X_{r-1} \supset \ldots \supset X_1 \supset X_0$ mit $X_r \neq \ldots \neq X_0$ erreichen kann. Die Dimension einer beliebigen Varietät X ist das Maximum der Dimensionen ihrer irreduziblen Komponenten. Besitzen alle Komponenten dieselbe Dimension, so spricht man von *reiner* Dimension. Eindimensionale Varietäten werden als *Kurven*, zweidimensionale als *Flächen* und $(n-1)$–dimensionale als *Hyperflächen* bezeichnet.

Satz 1.1.1. *Sei f ein homogenes Polynom, das auf der irreduziblen projektiven Varietät X nicht verschwindet. Dann ist $X \cap V(f)$ von reiner Dimension* $\dim X - 1$.

BEWEIS. [21, S. 57, Theorem 4 u. S.58, Theorem 5]. ∎

Satz 1.1.2. *Seien* $X, Y \subseteq \mathbb{P}^n$ *Varietäten mit* $\dim X = l$, $\dim Y = m$, $l + m \geq n$ *und* $X \cap Y \neq \emptyset$. *Dann ist* $Z := X \cap Y$ *eine Varietät, für deren Zerlegung in irreduzible Komponenten* $Z = Z_1 \cup \ldots \cup Z_r$ $\dim Z_i \geq m + l - n$ *für* $i = 1, \ldots, r$ *gilt. Sind weiterhin* X, Y *projektiv und ist* Y *Nullstellenmenge* $n - m$ *homogener Polynome, so gilt stets* $X \cap Y \neq \emptyset$.

BEWEIS. [21, S. 60, Theorem 6] und mehrfache Anwendung von Satz 1.1.1. ■

Mit den irreduziblen Varietäten sind auch gewisse algebraische Objekte verbunden. Wegen der Irreduzibilität von X ist $I(X)$ ein Primideal, so daß der *homogene Koordinatenring* $S[X] := k[x_0, \ldots, x_n]/I(X)$ ein Integritätsbereich ist. Wegen der Homogenität von $I(X)$ überträgt sich die graduierte Struktur von $k[x_0, \ldots, x_n]$ auf $S[X]$. Die Elemente vom Grad Null im Quotientenkörper von $S[X]$ bilden einen Unterkörper, welcher *Körper der rationalen Funktionen auf* X heißt und mit $K(X)$ bezeichnet wird. Die Elemente von $K(X)$ sind also durch einen Quotienten zweier homogener Polynome $g, h \in k[x_0, \ldots, x_n]$ von gleichem Grad gegeben wobei zwei Paare $g/h, g'/h'$ genau dann zu identifizieren sind, wenn $gh' - g'h \in I(X)$ ist.

Ist $U \subseteq X$ offen und nichtleer, so bildet die Menge aller $g/h \in K(X)$ mit $h \neq 0$ auf U einen Unterring von $K(X)$, welcher mit $\mathcal{O}(U)$ bezeichnet wird und *Ring der regulären Funktionen auf* U genannt wird. Für $x \in U$ ist $\mathcal{O}_x(U) \supset \mathcal{O}(U)$, der Ring aller $g/h \in K(X)$ mit $h(x) \neq 0$, ein *lokaler Ring* mit maximalem Ideal m_x, das alle Elemente $g/h \in \mathcal{O}_x(U)$ mit $g(x) = 0$ umfaßt.

1.2 Reguläre Abbildungen

Nun wenden wir uns den Morphismen aus der Kategorie der Varietäten, den *regulären Abbildungen* zu.

Definition: Eine Abbildung $\varphi : X \to Y$ von Varietäten $X \subseteq \mathbb{P}^n, Y \subseteq \mathbb{P}^m$ heißt *regulär* genau dann, wenn zu jedem $x \in X$ ein offenes $U \subseteq X$ mit $x \in U$ und homogene Polynome $f_0, \ldots, f_m \in k[x_0, \ldots, x_n]$ von gleichem Grad d existieren, so daß für alle $z \in U$

$$\varphi(z) = (f_0(z), \ldots, f_m(z))$$

gilt (notwendigerweise ist dann $U \cap V(\{f_0, \ldots, f_m\}) = \emptyset$).

Häufiger Gebrauch wird von folgenden fundamentalen Eigenschaften regulärer Abbildungen gemacht.

Satz 1.2.1. *Sei $\varphi : X \to Y$ eine reguläre Abbildung. Dann gilt:*

(a) *φ ist stetig (bezüglich der Zariski–Topologien).*

(b) *X irreduzibel $\Rightarrow$ $\overline{\varphi(X)}$ irreduzibel.*

(c) *Es gibt eine nichtleere Menge $U \subseteq \varphi(X)$, die offen in $\overline{\varphi(X)}$ ist.*

(d) *X projektiv $\Rightarrow$ $\varphi(X)$ abgeschlossen.*

BEWEIS. a) Für eine abgeschlossene Teilmenge $\tilde{Y} := V(T) \cap Y$ von Y folgt mit $S := \{f \in k[x_0, \ldots, x_n] \mid f = g(f_0, \ldots, f_m) \;\; g \in T\}$ wegen $\varphi^{-1}(\tilde{Y}) \cap U = V(S) \cap U$ die Abgeschlossenheit von $\varphi^{-1}(\tilde{Y})$ lokal um jeden Punkt $x \in X$, also ist $\varphi^{-1}(\tilde{Y})$ abgeschlossen.
b) Angenommen es gelte $\overline{\varphi(X)} = Y_1 \cup Y_2$ mit in $\overline{\varphi(X)}$ abgeschlossenen $Y_1, Y_2 \neq \emptyset$ und $Y_1, Y_2 \neq \overline{\varphi(X)}$. Dann ist $\varphi^{-1}(Y_1) =: X_1, \varphi^{-1}(Y_2) =: X_2 \neq X$, da $\varphi(\varphi^{-1}(Y_i))$ bestimmt von $\varphi(X)$ für $i = 1, 2$ verschieden ist. Nach Teil a) sind X_1, X_2 abgeschlossen. Wegen $X = X_1 \cup X_2$ erhält man einen Widerspruch zur Irreduzibilität von X.
c) [21, S.50 Theorem 6].
d) [21, S.45 Theorem 2]. ■

Aus a) folgt insbesondere, daß $\varphi^{-1}(y)$ für alle $y \in Y$ abgeschlossen in X ist. Zur Dimensionsberechnung von Varietäten ist häufig folgender Satz nützlich:

Satz 1.2.2. *Sei $\varphi : X \to Y$ eine reguläre Abbildung irreduzibler Varietäten $\varphi(X) = Y$, $\dim X = l$, $\dim Y = m$. Dann folgt $m \leq l$ und*

(a) $\dim \varphi^{-1}(y) \geq l - m$ *für alle $y \in Y$.*

(b) *Es gibt eine nichtleere offene Teilmenge $U \subseteq Y$ mit $\dim \varphi^{-1}(y) = l - m$ für alle $y \in U$.*

(c) *Für $r \in \mathbb{N}$ ist die Menge $Y_r := \{y \in Y \mid \dim \varphi^{-1}(y) \geq r\}$ abgeschlossen in Y.*

BEWEIS. [21, S.60 Theorem 7 und Corollary]. ■

Satz 1.2.3. *Sei $\varphi : X \to Y$ eine reguläre Abbildung projektiver Varietäten mit irreduziblem $Y = \varphi(X)$. Alle Fasern $\varphi^{-1}(y)$ $(y \in Y)$ seien irreduzibel und von derselben Dimension ($\dim \varphi^{-1}(y) = \dim \varphi^{-1}(\tilde{y})$ für je zwei $y, \tilde{y} \in Y$). Dann ist auch X irreduzibel.*

BEWEIS. [21, S.61 Theorem 8]. ■

1.3 Produkte von Varietäten

Das Produkt zweier projektiver Räume $\mathbb{P}^n$, $\mathbb{P}^m$ wird als eine projektive Untervarietät $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \subset \mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$, der sogenannten *Segre–Varietät* erklärt. Durch

$$x \times y := (x_0y_0, \ldots, x_0y_m, x_1y_0, \ldots, x_1y_m, \ldots, x_ny_0, \ldots, x_ny_m)$$

wird unabhängig von der Wahl der Koordinatenvektoren von x und y ein Punkt $x \times y \in \mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$ definiert. Die (algebraische) Determinantenbedingung für

$$rang \begin{pmatrix} x_0y_0 & \ldots & x_0y_m \\ \vdots & & \vdots \\ x_ny_0 & \ldots & x_ny_m \end{pmatrix} = 1$$

ergibt die Gleichungen von $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ (vgl. [21, S.43]).

Jede projektive Untervarietät $Z \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ ist durch ein System von Polynomen aus $k[x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_m]$ gegeben, welche homogen sowohl bezüglich x als auch bezüglich y sind ([21, S.44]).

Sind $X \subseteq \mathbb{P}^n$, $Y \subseteq \mathbb{P}^m$ abgeschlossen, dann gilt dies offenbar auch für $X \times Y$ in $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$, da etwa die homogenen Polynome aus $k[x_0, \ldots, x_n]$ auch in $k[x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_m]$ liegen und homogen bezüglich x sind. Wegen $(X \backslash X_1) \times (Y \backslash Y_1) = X \times Y \backslash (X_1 \times Y \cup X \times Y_1)$ ist daher das Produkt $X \times Y$ beliebiger Varietäten X und Y wieder eine solche. Rekursiv ist nun auch das Produkt mehrerer Varietäten $X_1 \times \ldots \times X_r$ $(r \in \mathbb{N})$ definiert. Die Projektionsabbildungen $pr_{X_i} : X_1 \times \ldots \times X_r \to X_i$ für $i = 1, \ldots, r$ sind stets regulär, wie man leicht sieht.

Satz 1.3.1. *Es gilt:*

(a) X, Y *projektiv* $\Rightarrow X \times Y$ *projektiv.*

(b) X, Y *irreduzibel* $\Rightarrow X \times Y$ *irreduzibel.*

(c) $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$.

Beweis. a) Siehe oben.
b) Wende Satz 1.2.3 auf $\overline{X} \times \overline{Y}$ und $pr_{\overline{X}}$ an.
c) [21, S.54 Ex.4]. ∎

Satz 1.3.2. *Sei* $X \subseteq \mathbb{P}^{n_1} \times \ldots \times \mathbb{P}^{n_r}$ *eine projektive Untervarietät von der reinen Dimension* $\dim X = n_1 + \ldots + n_r - 1$. *Dann gibt es ein Polynom* $f \in k[x_0^1, \ldots, x_{n_1}^1, x_0^2, \ldots, x_{n_2}^2, \ldots, x_0^r, \ldots, x_{n_r}^r]$, *welches homogen bezüglich sämtlicher Faktorräume* $\mathbb{P}^{n_i}$ $(i = 1, \ldots, r)$ *ist und dessen Nullstellenmenge* X *ist. Bis auf* *einen skalaren Faktor ist f eindeutig bestimmt (falls man es ohne mehrfache Faktoren voraussetzt). Umgekehrt besitzt die Nullstellenmege eines einzelnen solchen Polynoms stets reine Dimension $n_1+\ldots+n_r-1$ (d.h. alle Komponenten besitzen diese Dimension).*

BEWEIS. [21, S.56, Theorem 3'] und Satz 1.1.1. ■

1.4 Der Tangentialraum

Sei $x \in X$ ein festgewählter Punkt auf der Varietät X. Der *Tangentialraum* T_xX *in* x *an* X ist auf abstrakte Weise als dualer Vektoraum zu m_x/m_x^2 definiert, wobei $m_x \subset \mathcal{O}_x(X)$ das maximale Ideal ist. In dieser Arbeit soll T_xX aber stets den eingebetteten projektiv abgeschlossenen Tangentialraum in x an X bezeichnen. Ist $\{f_1, \ldots, f_r\}$ eine Basis des homogenen Ideals $I(X)$, so besitzt T_xX eine Gleichungsdarstellung

$$T_xX = V(\{g_1, \ldots, g_r\}),$$

wobei $g_1, \ldots, g_r \in k[y_0, \ldots, y_n]$ die linearen homogenen Formen

$$g_i(y) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) y_j$$

sind und $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ die formalen partiellen Ableitungen von f_i nach x_j bezeichnen.

T_xX ist ein linearer Unterraum von $\mathbb{P}^n$ mit $\dim T_xX \geq \dim X$. Als singuläre Punkte von X bezeichnet man diejenigen der Menge

$$\operatorname{Sing} X := \{x \in X | \dim T_xX > \dim X\}.$$

$\operatorname{Sing} X$ heißt *singulärer Ort* von X und ist abgeschlossen in X, da es durch die (algebraische) Determinantenbedingung für

$$rang \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_0} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_0} & \cdots & \frac{\partial f_r}{\partial x_n} \end{pmatrix} \leq n - \dim X - 1$$

gegeben ist. Die nichtleere offene Menge der *regulären Punkte* ist also eine Untervarietät, die wir mit

$$X^{sm} := X \setminus \operatorname{Sing} X$$

(sm steht für 'smooth') bezeichnen.

Ist $\varphi : X \to Y$ eine reguläre Abbildung $x \in X$ und $\varphi(x) =: y \in Y$, so induziert φ eine projektive Abbildung

$$T_x\varphi : T_xX \to T_yY,$$

welche *Differential von φ in x* genannt wird (faßt man T_xX als $(m_x/m_x^2)^*$ auf, so ist $T_x\varphi$ eine lineare Abbildung).

Ist $U \subseteq X$ offen und $x \in U$, so daß mit den homogenen Formen g_i gleichen Grades $\varphi(z) = (g_0(z), \ldots, g_m(z))$ für alle $z \in U$ gilt, so besitzt $T_x\varphi$ die Abbildungsmatrix

$$M := \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_0} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_0} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}(x)$$

(d.h. $T_x\varphi(z) = Mz$).

Eine reguläre Abbildung $\varphi : X \to Y$ mit $\overline{\varphi(X)} = Y$ bezeichnet man als *allgemein glatt*, wenn es eine nichtleere offene Teilmenge $X_0 \subseteq X$ gibt, so daß $T_x\varphi$ surjektiv für jedes $x \in X_0$ ist.

Satz 1.4.1. *Ist die Charakteristik des Körpers k gleich Null (was hier stets vorausgesetzt ist), dann ist jede reguläre Abbildung $\varphi : X \to Y$ mit $\overline{\varphi(X)} = Y$ allgemein glatt.*

BEWEIS. [10, S.272, Corollary 10.7] (beachte auch die dortige Proposition 10.4 S.270). ■

1.5 Tangentenkegel und Vielfachheiten

Sei $X \subseteq \mathbb{P}^n$ eine Varietät und $x \in X$. Wir definieren den Tangentenkegel in x an X auf analytische Weise. Sei das Koordinatensystem in $\mathbb{P}^n$ so gewählt, daß $x = (1, 0, \ldots, 0)$ ist. Schreibt man ein homogenes Polynom $f \in I(X)$ in der Form

$$f = x_0^m f_{d-m} + x_0^{m-1} f_{d-m+1} + \ldots + x_0 f_{d-1} + f_d \qquad (1.1)$$

wobei $d = \deg f$, $m < d$ und $f_i \in k[x_1, \ldots, x_n]$ homogen vom Grad i ist, so ist die Varietät $TC_xX := V(T)$, worin T die Menge aller Polynome f_{d-m} (zu $f \in I(X)$ gemäß Gleichung (1.1)) ist, ein Kegel, den wir den Tangentenkegel in x an X nennen. Es gilt dann $TC_xX \subseteq T_xX$ und $TC_xX = T_xX$, falls x regulär ist. Ist X speziell eine Hyperfläche ($X = V(f)$), dann gilt $TC_xX = V(f_{d-m})$ (vgl. hierzu [21, S.79]).

Für eine Hyperfläche $X = V(f)$ und $x \in \mathbb{P}^n$ definieren wir die *Vielfachheit* $\mu_x(X)$ als diejenige natürliche Zahl $s =: \mu_x(X)$, für die

$$\forall r < s \ \forall (i_1, \ldots, i_r) \in (0, \ldots, n)^r \ \frac{\partial^r f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_r}}(x) = 0 \ \wedge$$
$$\exists (i_1, \ldots, i_s) \in (0, \ldots, n)^s \frac{\partial^s f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_s}}(x) \neq 0 \qquad (1.2)$$

gilt. Wählt man Koordinaten wie oben und schreibt f in der Form (1.1), so gilt $\mu_x(X) = d - m$. Das ergibt

$$x \in X \Leftrightarrow \mu_x(X) \geq 1 \quad \wedge \quad x \in \operatorname{Sing} X \Leftrightarrow \mu_x(X) \geq 2.$$

Nach Gleichung (1.2) ist die Menge aller $x \in X$ mit $\mu_x(X) \geq r$ $(r \in \mathbb{N})$ offenbar abgeschlossen und wir bezeichnen sie mit

$$\operatorname{Sing}_r X := \{x \in \mathbb{P}^n | \ \mu_x(X) \geq r\}. \qquad (1.3)$$

1.6 Duale Varietäten

Sei $X \subseteq \mathbb{P}^n$ eine irreduzible projektive Varietät. Dann heißt

$$CX := \overline{\{(x, H^\vee) \in X^{sm} \times \mathbb{P}^{n\vee} | \ H \supseteq T_x X\}}$$

die *Conormale Varietät von* X. Dabei bezeichne $\mathbb{P}^{n\vee}$ den *Dualraum von* $\mathbb{P}^n$ und $H^\vee$ den der Hyperebene $H \subset \mathbb{P}^n$ entsprechenden Punkt in $\mathbb{P}^{n\vee}$. Die *Duale Varietät von* X ist dann

$$X^\vee := pr_{\mathbb{P}^{n\vee}}(CX)$$

Die Bezeichnung ist mit den obigen Notationen $\mathbb{P}^{n\vee}$ und $H^\vee$ verträglich. Die Menge

$$\operatorname{Cont}_H X := pr_X(pr_{X^\vee}^{-1}(H^\vee) \cap CX) = \overline{\{x \in X^{sm} \mid H = T_x X\}}$$

heißt der *Berührort* von X mit der Hyperebene H.

Man sagt, die Varietät X sei *reflexiv*, wenn $CX = CX^\vee$ gilt, wobei natürlich $CX^\vee$ als Untervarietät von $X \times X^\vee$ und nicht von $X^\vee \times X$ aufzufassen ist. X heißt *bidual*, falls $X = X^{\vee\vee}$ gilt. Offensichtlich folgt aus der Reflexivität von X auch die Bidualität. Wir zitieren den überaus wichtigen

1.6.1. Satz (Monge–Serre–Wallace). *Sei $X \subseteq \mathbb{P}^n$ eine irreduzible projektive Varietät. Dann gilt: X ist reflexiv genau dann, wenn $pr_{X^\vee|CX}$ allgemein glatt ist.*

BEWEIS. [13, S.169] ■

Nach unseren Generalvoraussetzungen über k kann daher laut Satz 1.4.1 X stets als reflexiv angenommen werden.

Für eine reduzible Varietät X setzen wir zur Vereinfachung der Schreibweise:

$$CX := CX_1 \cup \ldots \cup CX_r, \quad X^\vee := {X_1}^\vee \cup \ldots \cup {X_r}^\vee,$$

wobei $X_1, \ldots, X_r$ die irreduziblen Komponenten von X sind. Für einen Satz aus Paragraph 2.6 benötigen wir nachstehende Folgerung aus einem *Theorem von Lê–Teissier* (siehe dazu [13, S.219]):

Satz 1.6.2. *Es gilt:*

(a) $(TC_xX)^\vee \subseteq \mathrm{Cont}_{x^\vee}X^\vee \;\wedge\; TC_xX \supseteq (\mathrm{Cont}_{x^\vee}X^\vee)^\vee$,

(b) $\dim \mathrm{Cont}_{x^\vee}X^\vee = 0 \Longrightarrow (TC_xX)^\vee = \mathrm{Cont}_{x^\vee}X^\vee$.

Beweis. a) Nach dem Theorem von Lê–Teissier gibt es irreduzible Untervarietäten $W_i \subseteq TC_xX \;\; (i = 1, \ldots, r)$, mit

$$TC_xX = \bigcup_{i=1}^{r} W_i \text{ und } \mathrm{Cont}_{x^\vee}X^\vee = \bigcup_{i=1}^{r} {W_i}^\vee.$$

Dann sind etwa $W_{i_1}, \ldots, W_{i_m} \;(i_1, \ldots, i_m \in \{1, \ldots, r\})$ die irreduziblen Komponenten von TC_xX und ${W_{j_1}}^\vee, \ldots, {W_{j_l}}^\vee \;(j_1, \ldots, j_l \in \{1, \ldots, r\})$ diejenigen von $\mathrm{Cont}_{x^\vee}X^\vee$. Also

$$(TC_xX)^\vee = \bigcup_{k=1}^{m} {W_{i_k}}^\vee \subseteq \mathrm{Cont}_{x^\vee}X^\vee \text{und}$$

$$(\mathrm{Cont}_{x^\vee}X^\vee)^\vee = \bigcup_{k=1}^{l} ({W_{i_k}}^{\vee\vee}) = \bigcup_{k=1}^{l} W_{i_k} \subseteq TC_xX$$

unter Verwendung der Bidualität der W_i.
b) folgt aus a), wenn man beachtet, daß nun TC_xX in Ebenen zerfällt. ■

Satz 1.6.3. *Sei X eine irreduzible projektive Varietät im $\mathbb{P}^n$. Dann gibt es eine nichtleere offene Menge $X'^\vee \subseteq X^\vee$, so daß für alle $H^\vee \in X'^\vee$ Cont_HX ein linearer Unterraum von $\mathbb{P}^n$ ist.*

Beweis. Wir setzen $X'^\vee := X^{\vee sm}$. Aus der Reflexivität von X folgt

$$\mathrm{Cont}_HX = pr_X(pr_{X^\vee}^{-1}(H^\vee) \cap CX^\vee) = (T_{H^\vee}X^\vee)^\vee \text{ für alle } H^\vee \in X'^\vee.$$

Also ist Cont_HX linear, da dies für $T_{H^\vee}X^\vee$ gilt. ■

Satz 1.6.4. *Für eine Fläche $F \subset \mathbb{P}^3$, deren duale Varietät $F^\vee \subset \mathbb{P}^{3\vee}$ ebenfalls eine Fläche ist, gibt es höchstens endlich viele Ebenen $E \subset \mathbb{P}^3$, für die* $\dim(\mathrm{Cont}_E F) = 1$ *gilt.*

Beweis. Die Conormale Varietät CF ist irreduzibel und zweidimensional, da die Fasern der Projektion $pr_F : CF \to F$ für $x \in F^{sm}$ einelementig sind (man wende dazu Satz 1.2.1 (b) und Satz 1.2.2 auf pr_F an). Die Menge $Y^\vee := \{E^\vee \in F^\vee \mid \dim(pr_{F^\vee}^{-1}(E^\vee) \cap CF) \geq 1\}$ ist nach Satz 1.2.2 (c) abgeschlossen. Wäre $Y^\vee$ eindimensional, so wäre nach Satz 1.2.2 $pr_{F^\vee}^{-1}(Y^\vee) \cap CF$ zweidimensional. Da nun CF irreduzibel und zweidimensional ist, ergibt sich $CF \subset pr_{F^\vee}^{-1}(Y^\vee)$. Daraus folgt $Y^\vee = F^\vee$ im Widerspruch zu $\dim F^\vee = 2$. ∎

Um ein Durcheinander in der Bezeichnungsweise zu vermeiden, werden die Elemente von $\mathbb{P}^{n\vee}$ stets mit $\vee$ indiziert (also $H^\vee \in \mathbb{P}^{n\vee}$). Die zugehörige Hyperebene des $\mathbb{P}^n$ wird dann stillschweigend durch $H := H^{\vee\vee} \subseteq \mathbb{P}^n$ notiert. Entsprechend verfahren wir mit den Varietäten des Dualraums: Wir indizieren sie stets mit $\vee$ ($X^\vee \subseteq \mathbb{P}^{n\vee}$) und im Fall einer projektiven Varietät wird implizit X kanonisch mit $X^{\vee\vee}$ identifiziert.

Kapitel 2

Theoretische Hilfsmittel

2.1 Chow–Varietäten

Der Umstand, daß Lösungen algebraischer Gleichungen gelegentlich mehrfach gezählt werden müssen, erfordert, den Varietäten einen hierfür zweckmässigeren Begriff an die Seite zu stellen.

Definition: Sei X eine Varietät und $r \in \mathbb{N}$, $r < \dim X$. Ein *r–Zykel* ist ein Element des von allen r–dimensionalen irreduziblen und abgeschlossenen Untervarietäten von X erzeugten freien $\mathbb{Z}$ –Moduls, der mit $Z_r(X)$ bezeichnet wird ([21, S.206], [10, S.425]).

Ein r–Zykel Z läßt sich daher als formale Summe

$$Z = \sum_{i=1}^{l} n_i X_i$$

schreiben, wobei l natürlich, n_i ganzzahlig und X_i irreduzible abgeschlossene Untervarietäten der Dimension r sind. Gilt $n_i \geq 0$ für alle i, so heißt Z auch *effektiv* (in Zeichen: $Z \geq 0$). Mit $\operatorname{supp} Z := X_1 \cup \ldots \cup X_l$ bezeichnen wir den *Träger von Z*. Im Fall $r = \dim X - 1$ spricht man anstelle von Zykeln von *Divisoren.*

Auf ähnliche Weise, wie man den Geraden des $\mathbb{P}^3$ *Plückerkoordinaten* und damit Punkte der *Plückerquadrik* zuordnet, oder allgemeiner r–dimensionalen linearen Unterräumen des $\mathbb{P}^n$ Punkte auf einer *Grassmannmannigfaltigkeit* zuschreibt, so kann man auch die effektiven r–Zykeln des $\mathbb{P}^n$ mit Koordinaten versehen, welche Punkte eines höherdimensionalen projektiven Raumes darstellen. Diese werden die *Chow–Koordinaten des Zykels Z* genannt. Auf ihre Herleitung wird nun in Kürze eingegangen.

Zunächst wollen wir dazu annehmen, daß $Z \in Z_r(X)$ ein effektiver *Primzykel* ist, d.h. $Z = \operatorname{supp} Z$ und $\operatorname{supp} Z$ ist irreduzibel. In $\mathbb{P}^n \times (\mathbb{P}^{n\vee})^{r+1}$ ist die Menge

$\Lambda := \{(x, H_0{}^\vee, \ldots, H_r{}^\vee) \in \mathbb{P}^n \times (\mathbb{P}^{n\vee})^{r+1} \mid x \in H_0 \cap \ldots \cap H_r\}$ abgeschlossen, wie man leicht sieht (Gleichungen: $\sum_{j=0}^n H_{ij}{}^\vee x_j = 0$ für $i = 0, \ldots, r$). Dasselbe gilt daher für $\Lambda' Z := \Lambda \cap pr_{\mathbb{P}^n}^{-1}(Z)$ und $\Lambda Z := pr_Y(\Lambda' Z)$, wobei $Y := (\mathbb{P}^{n\vee})^{r+1}$ ist (Satz 1.2.1 angewand auf die Projektionsabbildungen). Für jedes $z \in Z$ ist $pr_{\mathbb{P}^n}^{-1}(z) \cap \Lambda = pr_{\mathbb{P}^n}^{-1}(z) \cap \Lambda' Z = (z^\vee)^{r+1}$. Da die $z^\vee$ Hyperebenen im $\mathbb{P}^{n\vee}$ sind, ist zum einen $\dim(pr_{\mathbb{P}^n}^{-1}(z) \cap \Lambda' Z) = (n-1)(r+1)$ und zum anderen ist $(z^\vee)^{r+1}$ irreduzibel (Satz 1.3.1) für alle $z \in Z$. Damit ist nach Satz 1.2.3 $\Lambda' Z$ und folglich auch ΛZ irreduzibel. Aus Satz 1.2.2 erhält man $\dim \Lambda' Z = n(r+1) - 1$ und Satz 1.1.1 liefert die Existenz eines $y = (H_0{}^\vee, \ldots, H_r{}^\vee) \in Y$ mit $\dim(pr_Y^{-1}(y) \cap \Lambda' Z) = 0$, woraus $\dim \Lambda Z = n(r+1) - 1$ folgt. Demnach ist ΛZ eine Hyperfläche in Y und nach Satz 1.3.2 gibt es ein bis auf einen skalaren Faktor eindeutig bestimmtes $(r+1)$–fach homogenes Polynom f_Z, dessen Nullstellenmenge ΛZ ist. Man nennt f_Z die *zugeordnete Form* und seine Koeffizienten die *Chow–Koordinaten* von Z. Da nach Satz 1.1.1 zu jedem $z \notin Z$ stets Hyperebenen $H_0{}^\vee, \ldots, H_r{}^\vee \in z^\vee$ existieren mit $H_0 \cap \ldots \cap H_r \cap Z = \emptyset$, folgt

$$z \in Z \iff (z^\vee)^{r+1} \subseteq \Lambda Z. \tag{2.1}$$

Damit ist also nicht nur f_Z durch Z (bis auf einen Faktor), sondern auch Z durch f_Z eindeutig bestimmt. Aus diesem Grund müssen auch die $r+1$ Homogenitätsgrade von f_Z bezüglich der einzelnen Faktoren $\mathbb{P}^{n\vee}$ von Y übereinstimmen, da offensichtlich ΛZ bezüglich diesen symmetrisch ist. Den dadurch eindeutig bestimmten Homogenitätsgrad d von f_Z nennt man die *Ordnung* oder den *Grad* von Z (in Zeichen: $\deg Z = d$).

Nun sei Z ein beliebiger effektiver Zykel: $Z = \sum_{i=1}^l n_i X_i$. Als zugeordnete Form von Z bezeichnen wir dann

$$f_Z := \prod_{i=1}^l (f_{X_i})^{n_i}.$$

Der Grad von Z wird durch

$$\deg Z := \sum_{i=1}^l n_i \deg X_i$$

definiert und stimmt mit den Homogenitätsgraden von f_Z bezüglich aller $r+1$ Faktoren überein.

Vermittels der Chow–Koordinaten entspricht nun jedem effektiven Zykel der Dimension r und vom Grad d ein Punkt des projektiven Raumes $\mathbb{P}^{\nu_{n,r,d}}$ wobei $\nu_{n,r,d} := \binom{(n+1)^{r+1} + d(r+1)}{d(r+1)} - 1$ ist (Binominalkoeffizient!). Mit $C_{r,d}(X) \subseteq \mathbb{P}^{\nu_{n,r,d}}$ bezeichnen wir die Menge aller Punkte, deren Koordinaten Chow–Koordinaten eines effektiven r–Zykels vom Grad d sind und zu $c \in C_{r,d}(X)$ mit Z_c den entsprechenden Zykel.

Satz 2.1.1. *Sei $X \subseteq \mathbb{P}^n$ eine projektive Varietät. Dann ist auch $C_{r,d}(X) \subseteq \mathbb{P}^{\nu_{n,r,d}}$ eine projektive Varietät, die sogenannte* Chow–Varietät.

Beweis. [25, S.218/220 (ZAG IX)] oder [24, S.160] (vgl. auch [21, S.68] und [8]). ■

Die Addition im Modul $Z_r(X)$ definiert Abbildungen

$$Add : C_{r,d}(X) \times C_{r,e}(X) \to C_{r,d+e}(X).$$

Wegen $f_{Z_1+Z_2} = f_{Z_1} f_{Z_2}$ sind die Chow–Koordinaten von $Z_1 + Z_2$ Polynome in den Chow–Koordinaten von Z_1, Z_2, die sowohl bezüglich Z_1 als auch bezüglich Z_2 homogen vom Grad eins sind. Daher sind die Abbildungen *Add* auf der projektiven Varietät $C_{r,d}(X) \times C_{r,e}(X)$ regulär, weil sie offensichtlich auch überall definiert sind. Daran erkennt man insbesondere, daß die Teilmenge aller irreduziblen projektiven Untervarietäten von X, die wir mit $C_{r,d}(X)^{irr}$ bezeichnen, aufgefaßt als Teilmenge von $C_{r,d}(X)$ offen ist. Denn es gilt

$$C_{r,d}(X)^{irr} = C_{r,d}(X) \backslash (\bigcup_{e=0}^{d} (C_{r,e}(X) \times C_{r,d-e}(X)))$$

wobei der Ausdruck in der Klammer als endliche Vereinigung von Bildbereichen regulärer Abbildungen abgeschlossen ist ($C_{r,e}(X) \times C_{r,d-e}(X)$ ist abgeschlossen nach Satz 2.1.1 und 1.3.1 (a)).

Es wird nun eine geometrische Interpretation des oben definierten Grades einer projektiven Varietät gegeben, wozu folgendes Lemma gebraucht wird:

Lemma 2.1.2. *Sei $f \in k[x_0, \ldots, x_n, y_0^1, \ldots, y_{m_1}^1, \ldots, y_0^r, \ldots, y_{m_r}^r]$ eine in x und $y^1, \ldots, y^r$ homogene Form, die keine mehrfachen Faktoren besitzt. Dann gibt es eine nichtleere offene Menge $U \subseteq \mathbb{P}^{m_1} \times \ldots \times \mathbb{P}^{m_r} =: Y$, so daß für alle $y := (y^1, \ldots, y^r) \in U$ das Polynom $f_y := f(x, y^1, \ldots, y^r) \in k[x_0, \ldots, x_n]$ (als solches in x) keine mehrfachen Faktoren besitzt.*

Beweis. Wir fassen die Menge der homogenen Polynome festen Grades d aus $k[x_0, \ldots, x_n]$ als Punkte des Raumes $\mathbb{P}^{\nu_{n,d}}$ auf, wobei $\nu_{n,d} := \binom{n+d}{d} - 1$ (Binomialkoeffizient!) ist und proportionale Polynome zu identifizieren sind. Die echte Teilmenge derjenigen Polynome, welche mehrfache Faktoren besitzen, ist hierin abgeschlossen. Dazu betrachtet man in $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{\nu_{n,d}}$ die durch die Gleichungen $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = 0 \;\; i = 0, \ldots, n$ definierte abgeschlossene Menge. Die Abgeschlossenheit der fraglichen Menge folgt dann aus einer Anwendung von Satz 1.2.2 (c) auf die Projektionsabbildung auf $\mathbb{P}^{\nu_{n,d}}$, denn gerade für Polynome aus ihr besitzt diese $(n-1)$–dimensionale Fasern. Da die kanonische Abbildung $\delta : Y \to \mathbb{P}^{\nu_{n,d}}$ mit $\delta(y) = f_y$ offenbar auf einer nichtleeren offenen Teilmenge von Y regulär ist (die Koeffizienten von f bezüglich x sind r–fach homogene Polynome gleichen Grades in y), genügt es nach Satz 1.2.1 (a) ein y zu finden, so daß f_y keine mehrfachen Faktoren besitzt. Wir nehmen nun an, daß es ein solches y nicht gibt. Die Menge

$$V := \{(x,y) \in \mathbb{P}^n \times Y \mid f_y = g_y^k h_y \ \wedge \ g_y(x) = 0 \ \wedge \ k > 1\}$$

ist in der Nullstellenmenge Z von f enthalten. Für alle $y \in Y$ ist $pr_Y^{-1}(y) \cap V$ abgeschlossen und nach der Annahme stets $(n-1)$–dimensional. Daher gibt es eine irreduzible Komponente $W \subseteq \overline{V} \subseteq Z$ (Abschluß in $\mathbb{P}^n \times Y$) mit $\dim(pr_Y^{-1}(y) \cap W) = n-1$ für alle $y \in Y$. Insbesondere sieht man $W \subset V$, da dies faserweise gilt. Nach Satz 1.2.2 hat man $\dim W = n + m_1 + \ldots + m_r - 1$, weshalb W nach Satz 1.3.2 eine irreduzible Gleichung $g(x, y^1, \ldots, y^r) = 0$ besitzt. Aus $W \subseteq Z$ folgt $f = gh$ mit einem geeigneten Restpolynom h. Da f das Polynom g nur in einfacher Potenz enthält und nach der Annahme W in der Nullstellenmenge der n Polynome $\frac{\partial f}{\partial x_i} = h\frac{\partial g}{\partial x_i} + g\frac{\partial h}{\partial x_i}$ $(i = 0, \ldots, n)$ enthalten ist, müssen die Polynome $h\frac{\partial g}{\partial x_i}$ $(i = 0, \ldots, n)$ auf W verschwinden. Das heißt $V(h) \cup V(\frac{\partial g}{\partial x_i}) \supset W$ und die Irreduzibilität von W liefert daraus $W \subset V(h)$ oder $W \subset V(\frac{\partial g}{\partial x_i})$. Der erste Fall ist nicht möglich, da g das Polynom h nicht teilen kann. Weil die Charakteristik des Körpers k Null, $\deg \frac{\partial g}{\partial x_i} < \deg g$ und g irreduzibel ist, ist aber auch der zweite Fall unmöglich. ∎

Satz 2.1.3. *Sei $X \subseteq \mathbb{P}^n$ eine projektive Varietät von reiner Dimension r. Mit L_{n-r} seien beliebige $(n-r)$–dimensionale lineare Unterräume von $\mathbb{P}^n$ gemeint, die wir als Punkte einer Grassmannmannigfaltigkeit $G_{n,n-r}$ deuten können. Dann gilt:*

(a) $d := \deg X \geq card(X \cap L_{n-r})$ *für alle* $L_{n-r} \in G_{n,n-r}$ *mit* $\dim(X \cap L_{n-r}) = 0$

(b) *Es gibt eine nichtleere offene Menge* $U \subseteq G_{n,n-r}$ *mit* $\deg X = card(X \cap L_{n-r})$ *für alle* $L_{n-r} \in U$

Beweis. Jeder $(n-r)$–dimensionale Unterraum L_{n-r} kann als Schnitt von r Hyperebenen $H_1, \ldots, H_r$ in allgemeiner Lage aufgefaßt werden. Wie man leicht sieht, ist in $(\mathbb{P}^{n\vee})^r$ die Menge aller r–Tuppel von Hyperebenen $(H_1{}^\vee, \ldots, H_r{}^\vee)$ mit $\dim(X \cap H_1 \cap \ldots \cap H_r) = 0$ nichtleer und offen (Satz 1.1.1). Nach der Konstruktion der zugeordneten Form f_X von X zerfällt diese als Polynom in $H^\vee$ (also $f_X(H^\vee, H_1{}^\vee, \ldots, H_r{}^\vee)$) in d lineare Faktoren. Jeder dieser linearen Faktoren hat ein Hyperebenenbündel (Menge aller Hyperebenen durch einen festen Punkt) als Nullstellenmenge. Das heißt: Jeder lineare Faktor entspricht genau einem Punkt von $X \cap H_1{}^\vee \cap \ldots \cap H_r{}^\vee$ (vermittels seiner Koeffizienten). Wegen $\dim(X \cap H_1 \cap \ldots \cap H_r) = 0$ ergibt Satz 1.1.2 $\dim(H_1{}^\vee \cap \ldots \cap H_r{}^\vee) = n-r$. Also gilt $card(X \cap L_{n-r}) \leq d$ für alle $L_{n-r} \in G_{n,n-r}$ mit $\dim(X \cap L_{n-r}) = 0$. Die Behauptung (b) folgt aus dem Lemma 2.1.2, da man eine offene Menge

$U \subseteq (\mathbb{P}^{n\vee})^r$ findet, so daß $f_X(H^\vee, {H_1}^\vee, \ldots, {H_r}^\vee)$ für alle $({H_1}^\vee, \ldots, {H_r}^\vee) \in U$ als Polynom in $H^\vee$ in d verschiedene lineare Faktoren zerfällt (vgl. [21, S.67]). ■

Zum Schluß des Paragraphen wollen wir uns kurz mit den effektiven Divisoren des $\mathbb{P}^n$ befassen und eine der vielen Versionen des *Satzes von Bezout* angeben. Für die effektiven Divisoren festen Grades d des $\mathbb{P}^n$ ist die Darstellung als Punkte einer Chow–Varietät umständlicher als nötig, denn sie entsprechen in eineindeutiger Weise den homogenen Polynomen d–ten Grades in $n+1$ Unbestimmten, wenn man proportionale Polynome identifiziert. Wie schon im Beweis des Lemmas 2.1.2 praktiziert, kann man sie daher als Punkte des Raumes $\mathbb{P}^{\nu_{n,d}}$ ansehen. Wir sagen, n effektive Divisoren $D_1, \ldots, D_n$ des $\mathbb{P}^n$ besitzen *allgemeine Lage*, wenn $\dim(\operatorname{supp} D_1 \cap \ldots \cap \operatorname{supp} D_n) = 0$ gilt. Für $x \in \operatorname{supp}(D_1 \cap \ldots \cap D_n)$ kann man eine affine Umgebung $U \subseteq \mathbb{P}^n$ mit $x \in U$ wählen, in der $D_1, \ldots, D_n$ durch die *inhomogenen* Polynome $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{O}_x(\mathbb{P}^n)$ gegeben sind. Nach dem *Hilbertschen Nullstellensatz* ([26, S.11]) gibt es eine Zahl $l \in \mathbb{N}$, so daß das Ideal $(f_1, \ldots, f_n) \supseteq m_x^l$ umfaßt, wobei m_x^l die l–te Potenz des maximalen Ideals des lokalen Ringes $\mathcal{O}_x(\mathbb{P}^n)$ ist. Daher ist $\mathcal{O}_x(\mathbb{P}^n)/(f_1, \ldots, f_n)$ ein endlichdimensionaler k–Vektorraum, da dies auch für $\mathcal{O}_x(\mathbb{P}^n)/m_x^l$ gilt und man kann durch

$$(D_1, \ldots, D_n)_x := \dim_k(\mathcal{O}_x(\mathbb{P}^n)/(f_1, \ldots, f_n))$$

die *Schnittmultiplizität von* $D_1, \ldots, D_n$ *in* x definieren.

2.1.4. Satz (Bezout). *Die effektiven Divisoren $D_1, \ldots, D_n$ des $\mathbb{P}^n$ seien in allgemeiner Lage. Dann gilt:*

$$\sum_{x \in \operatorname{supp} D_1 \cap \ldots \cap \operatorname{supp} D_n} (D_1, \ldots, D_n)_x = \deg D_1 \cdot \ldots \cdot \deg D_n.$$

Beweis. [21, S.198]. ■

Ist ein effektiver Divisor des $\mathbb{P}^n$ durch $D = \sum_{i=1}^{l} n_i H_i$ mit den Hyperflächen $H_1, \ldots, H_l$ gegeben, so kann man die im Kapitel 1.5 definierten Vielfachheiten auf D verallgemeinern durch:

$$\mu_x(D) := \sum_{i=1}^{l} n_i \, \mu_x(H_i). \tag{2.2}$$

Die Charakterisierung (1.2) bleibt dabei erhalten. Für den Spezialfall $n = 2$ erhält man für die Schnittmultiplizität $(D_1, D_2)_x$ folgende Kriterien:

Satz 2.1.5. *Es gilt:*

(a) $(D_1, D_2)_x = 1 \Longleftrightarrow \mu_x(D_1) = \mu_x(D_2) = 1 \ \wedge \ T_x \mathrm{supp}\, D_1 \neq T_x \mathrm{supp}\, D_2$

(b) $(D_1, D_2)_x \geq \mu_x(D_1)\, \mu_x(D_2)$

Beweis. [1, S.82/83] oder [21, S.184/185]. ■

Bemerkung 2.1.6. Eine andere Version des Satzes von Bezout (siehe [10, S.53]) besagt, daß die irreduziblen Komponenten C_i $(i = 1, \ldots, r)$ zweier Flächen F_1 und F_2 im $\mathbb{P}^3$ mit geeigneten Schnittmultiplizitäten $i(F_1, F_2; Z_i)$ versehen werden können, so daß für den effektiven 1–Zykel

$$Z = \sum_{i=1}^{r} i(F_1, F_2; Z_i) Z_i$$

$\deg Z = \deg F_1 \deg F_2$ gilt. Die algebraisch exakte Definition dieser Schnittmultiplizitäten ist für unsere Zwecke jedoch zu aufwendig und unangebracht. Zwar werden wir im Kapitel 3 diesen Sachverhalt oft verwenden, doch ist hier bis auf wenige Ausnahmen eine der beiden Flächen eine Ebene und man kann den Zykel Z auf einfache Weise als Divisor der Ebene E betrachten, wie dies auch in Lemma 2.5.5 geschieht. In den Ausnahmefällen wird jedoch in Kauf genommen, daß auf etwas umständliche Art auf die Schnittmultiplizitäten $i(F_1, F_2; Z_i)$ mit Hilfe der beiden vorigen Sätze geschlossen werden muß. Man muß dazu in Satz 2.1.4 die beiden Flächen mit geeigneten Ebenen E schneiden (also $(F_1, F_2, E)_x$ betrachten) und zwecks der Verwendung von Satz 2.1.5 die Schnitte als solche zweier Divisoren von E auffassen.

2.2 Algebraische Familien von Varietäten

Definition: Sei S eine Varietät und Γ eine abgeschlossene Menge in $\mathbb{P}^n \times S$ mit $pr_S(\Gamma) = S$. Für alle $s \in S$ sei $X_s := pr_{\mathbb{P}^n}(pr_S^{-1}(s) \cap \Gamma)$ von reiner Dimension r. Dann heißt $\{X_s \mid s \in S\}$ eine *algebraische Familie von Varietäten* mit *Parametervarietät* S (vgl. [21, S.68]).

Um der Definition Sinn zu verleihen wird gezeigt, daß X_s eine projektive Varietät ist. Sei also $S \subseteq \mathbb{P}^m$, $s \in S$ und $V_s := pr_S^{-1}(s) \cap \Gamma$. V_s ist abgeschlossen in Γ. Für den Abschluß $\overline{V_s}$ von V_s in $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ gilt nach Satz 1.2.1 (a) $pr_{\mathbb{P}^m}(\overline{V_s}) = s$. Demzufolge hat man $\overline{V_s} \subseteq \mathbb{P}^n \times S$, und daher $\overline{V_s} \subseteq \Gamma$, weil Γ abgeschlossen in $\mathbb{P}^n \times S$ ist. Die Abgeschlossenheit von V_s in Γ liefert nun $V_s = \overline{V_s}$ und mit Satz 1.2.1 erhält man, daß $X_s = pr_{\mathbb{P}^n}(V_s)$ projektiv ist.

Satz 2.2.1. *Sei $X \subseteq \mathbb{P}^n$ eine projektive Varietät und $r, d \in \mathbb{N}$. Dann ist $\{\mathrm{supp}\, Z_c \mid c \in C_{r,d}(X)\}$ eine algebraische Familie mit Parametervarietät $C_{r,d}(X)$ ($Z_c =$ Zykel mit Chow–Koordinate c).*

BEWEIS. Es ist eine abgeschlossene Menge $\Gamma_{r,d}(X) \subseteq X \times C_{r,d}(X)$ zu konstruieren mit $(x,c) \in \Gamma_{r,d}(X) \iff x \in \operatorname{supp} Z_c$. Dazu seien $N_i : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^{n\vee}$ für $i = 0, \ldots, r$ beliebige *Nullsysteme*, d.h. projektive Abbildungen mit schiefsymetrischen Abbildungsmatrizen A_i. Weiter seien $H_i^\vee := N_i(x)$ die Bildhyperebenen von $x \in X$. Nun substituiert man $H_i^\vee$ in die zugeordnete Form f_{Z_c} von Z_c:

$$f_{Z_c}(A_0 x, \ldots, A_r x). \tag{$*$}$$

Man fasse $(*)$ als Polynom mit den Einträgen der Matrizen A_i als den Unbestimmten auf. Da die N_i Nullsysteme sind, gilt $x \in H_i$. Also muß für $x \in \operatorname{supp} Z_c$ die Form $(*)$ identisch in den Komponenten der A_i verschwinden.

Hiervon gilt nun auch die Umkehrung: Ist für $x \in X$ die Form $(*)$ identisch Null in den Komponenten der Matrizen A_i, so folgt $x \in \operatorname{supp} Z_c$. Denn es gibt einen irreduzibler Faktor von f_{Z_c}, der in den A_i identisch Null ist. Diesem entspreche die irreduzible Komponente $Z_0 \subseteq \operatorname{supp} Z_c$. Zu beliebigen Hyperebenen H_i mit $x \in \bigcap_{i01}^r H_i$ findet man stets Nullsysteme N_i mit $H_i = N_i(x)$. Nun folgt $(x^\vee)^{r+1} \subseteq \Lambda Z_0$ und nach Gleichung (2.1) $x \in Z_0 \subseteq \operatorname{supp} Z_c$.

Die Koeffizienten von $(*)$ bezüglich der unbestimmten Komponenten der Matrizen A_i sind Polynome, die sowohl in den Chow–Koordinaten von Z_c als auch bezüglich x homogen sind. Nach den obigen Beweisschritten ist die Nullstellenmenge dieser Polynome aber gerade die Menge $\Gamma_{r,d}(X)$. ■

Satz 2.2.2. *Sei $\{X_s \mid s \in S\}$ eine algebraische Familie projektiver Untervarietäten X_s von reiner Dimension r der projektiven Varietät X. Dann gibt es ein $d \in \mathbb{N}$ und eine reguläre Abbildung $\delta : S \to C_{r,d}(X)$ mit $X_s = \operatorname{supp} Z_{\delta(s)}$ für alle $s \in S$. Weiterhin gibt es eine nichtleere offene Menge $S' \subseteq S$ so, daß $\deg X_s = d$ für alle $s \in S'$ gilt.*

BEWEIS. 1) Wir betrachten zunächst den Fall $r = n-1$, $X = \mathbb{P}^n$ und konstruieren eine Abbildung von S nach $\mathbb{P}^{\nu_{n,d}}$. Die gegebene algebraische Familie sei durch die Menge $\Gamma \subseteq \mathbb{P}^n \times S$ definiert und $f_1, \ldots, f_l \in k[x_0, \ldots, x_n, s_0, \ldots, s_m]$ seien Polynome, deren Nullstellenmenge Γ ist. Da die X_s von reiner Dimension $n-1$ sind, müssen für festes $s \in S$ die Polynome $f_{is}(x) := f_i(x,s) \in k[x_0, \ldots, x_n]$ für $i = 1, \ldots, l$ laut Satz 1.3.2 proportional sein, oder es verschwinden einige von ihnen, jedoch nicht alle gleichzeitig. Man beachte, daß f_{is} nach Lemma 2.1.2 (auf einer geeigneten nichtleeren offenen Teilmenge von S) ohne mehrfache Faktoren angenommen werden kann (sofern dies für die f_i vorausgesetzt wird). Insbesondere stimmen die Homogenitätsgrade der f_{is} bezüglich x überein und können mit d bezeichnet werden. Man kann nun S mit offenen Mengen $S_0, \ldots, S_k$ überdecken, so daß zu jedem $j \in \{0, \ldots, k\}$ ein $i_j \in \{1, \ldots, l\}$ existiert mit $f_{i_j s} \not\equiv 0$ für alle $s \in S_j$. Da die Koeffizienten der f_i bezüglich x homogene Polynome in s von gleichem Grad sind (f_i homogen bezüglich s), erhält man reguläre Abbildungen $\delta_j : S_j \to \mathbb{P}^{\nu_{n,d}}$, die jedem

$s \in S_j$ ein Polynom $f_{i_j s}$ mit $X_s = V(f_{i_j s})$ zuordnen. Wegen $\delta_j(s) = \delta_k(s)$ für $s \in S_j \cap S_k$ erhält man insgesamt eine reguläre Abbildung $\delta : S \to \mathbb{P}^{\nu_{n,d}}$ mit $X_s = V(\delta(s))$ (fasse darin $\delta(s)$ als Polynom auf!).
2) Für den allgemeinen Fall werden wir Teil 1) auf die Hyperflächen ΛX_s anwenden (siehe Herleitung der Chow–Koordinaten in Paragraph 2.1). Analog wie bei der Einführung der Chow-Koordinaten sieht man, daß die Menge

$$\Lambda := \{(H_0{}^\vee, \dots, H_r{}^\vee, s) \in (\mathbb{P}^{n\vee})^{r+1} \times S |\ \exists x \in \mathbb{P}^n\ (x, s) \in \Gamma \wedge x \in H_0 \cap \dots \cap H_r\}$$

abgeschlossen in $(\mathbb{P}^{n\vee})^{r+1} \times S$ ist, und daß für jedes $s \in S$ $\dim\,(pr_S^{-1}(s) \cap \Lambda) = n(r+1) - 1$ ist. Damit definiert Λ eine algebraische Familie von Hyperflächen im $(\mathbb{P}^{n\vee})^{r+1}$. Nach Schritt 1) gibt es eine reguläre Abbildung $\delta : S \to \mathbb{P}^{\nu_{n,r,d}}$ mit $\Lambda X_s = V(\delta(s))$. Also gilt für alle $s \in S$ gerade $X_s = \operatorname{supp} Z_{\delta(s)}$ und $\delta(S) \subseteq C_{r,d}(X)$. Wendet man Lemma 2.1.2 auf die Polynome f_i des ersten Beweisschrittes an, so sieht man, daß es eine nichtleere offene Menge $S' \subseteq S$ mit $\deg X_s = d$ für alle $s \in S'$ gibt. ■

Satz 2.2.2 gestattet es nun auf einfache Weise die *Dimension einer algebraischen Familie* $\{X_s \mid s \in S\}$ durch $\dim \overline{\delta(S)}$ zu definieren. Anhand der Sätze 2.2.1 und 2.2.2 sowie 1.2.1 sind algebraische Familien von abgeschlossenen irreduziblen Untervarietäten Y einer projektiven Varietät X mit $\dim Y = r$ und $\deg Y = d$ im wesentlichen durch Untervarietäten von $C_{r,d}(X)^{irr}$ gegeben.
Im Fall unserer Aufgabe, die projektiven Flächen F von vierter Ordnung des $\mathbb{P}^3$ auf einparametrige Familien von Kegelschnitten zu untersuchen, ist also die Dimension von $C_{1,2}(F)^{irr}$ und wenn möglich die Zahl der irreduziblen Komponenten dieser Varietät zu bestimmen. Im übrigen wird die Geometrie der rein achtdimensionalen projektiven Varietät $C_{1,2}(\mathbb{P}^3)$, zu deren Untervarietäten die $C_{1,2}(F)$ gehören, ausführlich in [22] beschrieben. Diesbezüglich sei noch bemerkt, daß $C_{1,2}(\mathbb{P}^3)^{irr}$ irreduzibel ist (siehe auch [21, S.69]).

Die algebraische Familie aller Kegelschnitte des $\mathbb{P}^3$ läßt sich auch auf eine andere interessante Weise parametrisieren, die in der projektiven Differentialgeometrie zur Definition von *Kegelschnittflächen* verwendet wird (siehe [6, S.2]): Für jeden Kegelschnitt C_2 im $\mathbb{P}^3$ ist $C_2{}^\vee \subset \mathbb{P}^{3\vee}$ ein irreduzibler quadratischer Kegel und umgekehrt ist die duale Varietät eines solchen wieder ein Kegelschnitt. Die Menge $M \subset \mathbb{P}^{\nu_{3,2}}$ aller irreduziblen quadratischen Kegel in $\mathbb{P}^{3\vee}$ ist eine Varietät, wie die Determinantenrechnung angewandt auf die Matrixdarstellung derselben lehrt. Um nun alle Kegelschnitte des $\mathbb{P}^3$ mittels M zu parametrisieren, ist noch die Abgeschlossenheit der durch

$$\Gamma := \{(x, C_2{}^\vee) \in \mathbb{P}^3 \times M \mid x \in C_2{}^{\vee\vee} = C_2\}$$

definierten Menge in $\mathbb{P}^3 \times M$ zu zeigen.
Dazu seien $z_0, \dots, z_3 \in \mathbb{P}^3$ vier linear unabhängige Punkte, $A_i := \{C_2{}^\vee \in M \mid \operatorname{Sing} C_2{}^\vee \in z_i{}^\vee\}$ (das sind die Kegel, deren Spitze in $z_i{}^\vee$ liegt) und $U_i :=$

$\mathbb{P}^3 \times (M \backslash A_i)$. Betrachtet man die Koeffizienten eines homogenen quadratischen Polynoms $f \in k[{E_0}^\vee, \ldots, {E_3}^\vee]$ als Koordinaten eines Punktes von M, so werden durch die Gleichungen $\frac{\partial f}{\partial {E_j}^\vee}(E^\vee) = 0$ $(j = 0, \ldots, 3)$ (d.h. $E^\vee$ ist Spitze des Kegels) abgeschlossene Mengen $B_i \subseteq {z_i}^\vee \times M$ definiert ($E^\vee \in {z_i}^\vee$). Aus $A_i = pr_M(B_i)$ folgt die Abgeschlossenheit der A_i. Damit liefern die U_i eine offene Überdeckung von $\mathbb{P}^3 \times M$ und man braucht lediglich die Abgeschlossenheit von $\Gamma \cap U_i$ in U_i zu zeigen. Dazu betrachtet man in ${z_i}^\vee \times U_i$ die Menge C_i aller Tripel $(E^\vee, x, {C_2}^\vee)$ welche den Gleichungen

$$f(E^\vee) = 0 \text{ und } x_k \frac{\partial f}{\partial {E_j}^\vee}(E^\vee) = x_j \frac{\partial f}{\partial {E_k}^\vee}(E^\vee)$$

$(0 \leq k < j \leq 3,\ x = (x_0, \ldots, x_3))$ (d.h. x proportional zum Koordinatenvektor der Tangentialebene in $E^\vee$ an den Kegel) genügen. Aus $\Gamma \cap U_i = pr_{U_i}(C_i)$ folgt dann die Behauptung.

2.3 Lineare Kurven–Systeme auf Flächen

Im folgenden sei F stets eine irreduzible projektive Fläche im $\mathbb{P}^n$ und $L \subseteq \mathbb{P}^{\nu_{n,d}}$ ein linearer Unterraum von effektiven Divisoren des $\mathbb{P}^n$ vom Grad d und $F \not\subseteq \operatorname{supp} l$ für alle $l \in L$ (gegeben durch das entsprechende Polynom, dessen Koeffizienten die Koordinaten des Punktes aus $\mathbb{P}^{\nu_{n,d}}$ sind).

Definition: Die durch $\Gamma := \{(x, l) \in F \times L \mid l(x) = 0\} \subseteq F \times L$ definierte algebraische Familie $\{\operatorname{supp} l \cap F =: C_l \mid l \in L\}$ heißt ein *lineares System von Kurven auf F*.

Nach Satz 1.2.2 ist $B := \{x \in F \mid pr_F^{-1}(x) \cap \Gamma = x \times L\}$ abgeschlossen und $\dim B \leq 1$. Aus $\dim B = 1$ folgt $\dim (B \times L) = \dim \Gamma$, weshalb $B \times L$ eine Komponente von Γ ist. Nun definiert $\Gamma' := \overline{\Gamma \backslash (B \times L)} \neq \emptyset$ ebenfalls eine algebraische Familie von Kurven auf F mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß die $C_l := pr_F(pr_L^{-1}(l) \cap \Gamma')$ keine Komponente besitzen, welche für alle $l \in L$ fest bleibt.

Definition: Die durch Γ' definierte Familie $\{C_l \mid l \in L\}$ heißt ein lineares System von Kurven auf F *ohne feste Bestandteile*. Die Menge B heißt *Basispunktmenge* des Systems (sie ist für ein System ohne feste Bestandteile nach Konstruktion von Γ' leer oder nulldimensional).

Bemerkung: Die Divisoren l induzieren auf F Divisoren von recht einfachem Typ, welche man *lokale Hauptdivisoren* von F nennt (sie werden lokal – etwa in affinen Umgebungen – von rationalen Funktionen induziert). In der Literatur werden daher lineare Systeme von Divisoren auf F erklärt. Für singuläre Flächen erweist sich diese Theorie jedoch als recht kompliziert, so daß wir uns hier auf den einfacheren Begriff beschränken.

Lemma 2.3.1. *Sei $\{C_l \mid l \in L\}$ ein lineares System und $y \notin B$. Dann ist die Menge $L_y := \{l \in L \mid y \in C_l\}$ eine Hyperebene in L.*

Beweis. Betrachtet man $l \in L$ als Polynom, und ist $f_1, \ldots, f_r$ eine Basis von L, so schreibt sich jedes $l \in L$ in der Form

$$l(x) = \lambda_1 f_1(x) + \ldots + \lambda_r f_r(x) \text{ mit } \lambda_1, \ldots, \lambda_r \in k.$$

Für festes $y \notin B$ sind $f_1(y), \ldots, f_r(y)$ feste Zahlen, die nicht alle Null sind. Also wird durch die lineare Gleichung $\lambda_1 f_1(y) + \ldots + \lambda_r f_r(y) = 0$ in $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ eine Hyperebene in L definiert, welche gerade die Elemente von L_y umfaßt. ■

Lemma 2.3.2. *Sei $\{C_l \mid l \in L\}$ ein lineares System mit $\dim L = 1$ (ein solches heißt auch* lineares Büschel*). Dann gilt $C_l \cap C_{l'} = B$ für alle $l, l' \in L$ mit $l \neq l'$.*

Beweis. Die Behauptung $B \subseteq C_l \cap C_{l'}$ folgt aus der Definition von B. Um $B \supseteq C_l \cap C_{l'}$ zu zeigen, nehme man $x \in C_l \cap C_{l'} \backslash B$ an. Nach Lemma 2.3.1 ist L_x eine Hyperebene von L, also ein Punkt und es folgt $l = l'$. ■

Satz 2.3.3. *Sei $\{C_l \mid l \in L\}$ ein lineares System von Kurven auf F ohne feste Bestandteile mit $\dim L = 1$. Dann gibt es eine algebraische Familie $\{K_s^d \mid s \in S\}$ von Kurven auf F, die für eine nichtleere offene Teilmenge $S' \subseteq S$ der eindimensionalen irreduziblen und projektiven Parametervarietät S irreduzibel und von d-tem Grad sind, so daß zu jedem $l \in L$ $s_1, \ldots s_j, \in S$ existieren mit $C_l = K_{s_1}^d \cup \ldots \cup K_{s_j}^d$.*

Beweis. Mit B wird wieder die Basispunktmenge des Systems bezeichnet. Betrachte nun die Abbildung $\delta : L \to C_{1,e}(F)$ aus Satz 2.2.2. Es gilt $C_l = \operatorname{supp} Z_{\delta(l)}$. Da L irreduzibel und projektiv ist, gilt dies nach Satz 1.2.1 auch für $T := \delta(L)$. Ebenso ist T eindimensional. Falls $T \cap C_{1,e}(F)^{irr} \neq \emptyset$ gilt, ist man mit $S := L$ fertig, da die Kurven C_l für l aus einer nichtleeren offenen Teilmenge von L (beachte die Stetigkeit von δ) dann selbst schon irreduzibel sind. Im anderen Fall betrachten wir die Additionsabbildungen von Zykeln (siehe Anschluß an Satz 2.1.1). Man findet natürliche Zahlen $d_1, \ldots, d_j$ so daß

$$T \subseteq \overline{Add(C_{1,d_1}(F)^{irr} \times \ldots \times C_{1,d_j}(F)^{irr})}$$

gilt, d.h. alle bis auf eventuell endlich viele der Kurven C_l zerfallen in irreduzible Kurven der Ordnungen $d_1, \ldots, d_j$. Sei nun

$$S_i' := pr_{C_{1,d_i}(F)^{irr}}(Add^{-1}(T)) \neq \emptyset \text{ für } i = 1, \ldots, j.$$

Wir nehmen nun o.B.d.A. S'_i als irreduzibel an (andernfalls zerlege man diese in irreduzible Komponenten und numeriere neu durch). Man erhält also nach Satz 2.2.1 j einparametrige algebraische Familien $\{K_s^{d_i} \mid s \in S'_i\}$ mit $K_s^{d_i} := \operatorname{supp} Z_s = Z_s$ von irreduziblen Kurven, die wegen der Irreduzibilität von F offene Mengen W_i von F überdecken. Nun findet man zu jedem $t \in T$, jedem i und jeder irreduziblen Komponente $C \subseteq \operatorname{supp} Z_t$ mit $C \cap W_i \neq \emptyset$ ein $s_i \in S'_i$ so daß $C = K_{s_i}^{d_i}$ gilt. Denn ist $x \in (C \cap W_i) \backslash B \neq \emptyset$ (B abgeschlossen und höchstens nulldimensional), so gibt es wegen $x \in W_i$ ein $s_i^x \in S'_i$ mit $x \in K_{s_i^x}^{d_i}$. Hierzu gibt es ein $t' \in T$ mit $K_{s_i^x}^{d_i} \subset \operatorname{supp} Z_{t'}$. Wegen $x \notin B$ folgt aus Lemma 2.3.2 $t = t'$. Da x aus einer nichtleeren offenen Teilmenge von C gewählt werden kann, $K_{s_i^x}^{d_i}$ bei Abänderung von x aber nur die endlich vielen irreduziblen Komponenten von Z_t durchlaufen kann, gibt es wegen der Irreduzibilität der Kurven $K_{s_i^x}^{d_i}$ und C ein s_i mit $C = K_{s_i}^{d_i}$ (beachte k unendlich da algebraisch abgeschlossen!).
Daher müssen alle $d_i =: d$ und $S'_i =: S'$ übereinstimmen. Mit der algebraischen Familie $\{K_s^d \mid s \in S\}$ ($S := \overline{S'}$) folgt dann wegen $\delta(L) = T$, $T \subseteq Add(\underbrace{S \times \ldots \times S}_{j-\mathrm{mal}})$ und $S' \subseteq C_{1,d}(F)^{irr}$ die Behauptung. ■

Satz 2.3.4. *Sei $\{C_l \mid l \in L\}$ ein lineares System von reduziblen Kurven auf F ohne feste Bestandteile. Dann gibt es zu jedem $k \in L$ eine nichtleere offene Menge $U \subseteq L$, so daß $C_k \cap C_{k'} \subseteq B$ ($B =$ Basispunktmenge) für alle $k' \in U$ gilt.*

Beweis. Sei $k \in L$ beliebig und $C_k = C_k^1 \cup \ldots \cup C_k^m$ die Zerlegung von C_k in irreduzible Komponenten. Wegen $\dim B = 0$ oder $B = \emptyset$ ist $M := \{l \in L \mid \dim(C_l \cap C_k) \geq 1\}$ eine echte, abgeschlossene Teilmenge von L. Um die Abgeschlossenheit von L einzusehen, betrachte man die Menge $A_k := \{(x,l) \in C_k \times L \mid x \in C_l\}$ und wende Satz 1.2.2 (b) auf die Einschränkung der Projektion pr_L auf A_k an. Die Mengen $L_y := \{l \in L \mid y \in C_l\}$ sind abgeschlossen nach Lemma 2.3.1 und es gilt $L_y = L \iff y \in B$. Die Menge $K := \{y \in C_k \mid \exists i,j \;\; i \neq j \text{ mit } y \in C_k^i \cap C_k^j\}$ ist endlich als Schnitt einer endlichen Zahl von irreduziblen Kurven. Also ist $N := \bigcup_{y \in K \backslash B} L_y$ eine echte abgeschlossene Teilmenge von L. Sei nun $k' \in U := L \backslash (M \cup N \cup \{k\}) \neq \emptyset$. Es wird nun $C_k \cap C_{k'} \subseteq B$ gezeigt:
Sei dazu G die Verbindungsgerade der Punkte k, k' in L und $\{C_l \mid l \in G\}$ das lineare eindimensionale Teilsystem (*Büschel*) von $\{C_l \mid l \in L\}$ mit der Basispunktmenge B_G. Im Fall des linearen Büschels gilt nach Lemma 2.3.2 für alle $l, l' \in G$ $C_l \cap C_{l'} = B_G$. Wegen $k' \notin M$ ist $\dim B_G = 0$ oder $B = \emptyset$. Nun gibt es nach Satz 2.3.3 eine algebraische Familie $\{K_s \mid s \in S\}$ von Kurven, welche auf einer nichtleeren offenen Teilmenge von S irreduzibel sind, so daß es zu jedem $l \in G$ $s_1, \ldots, s_r \in S$ gibt mit $C_l = K_{s_1} \cup \ldots \cup K_{s_r}$. Weil alle C_l reduzibel sind, muß $r \geq 2$ gelten.
Sei nun $x \in C_k \cap C_{k'} = B_G$ gegeben. Da nun x für alle $l \in G$ in C_l enthalten

ist, muß es auch in jeder Kurve K_s enthalten sein. Dazu sieht man zunächst ein, daß jedes K_s in höchstens einem C_l enthalten sein kann. Denn K_s enthält ein $z \notin B_G$ und nach Lemma 2.3.2 gibt es nur ein C_l, welches dieses enthält. Ist nun $\{K_s \mid s \in S\}$ durch $\Gamma \subset \mathbb{P}^n \times S$ definiert, so folgt $card(pr_{\mathbb{P}^n}^{-1}(x) \cap \Gamma) = \infty$, also $pr_{\mathbb{P}^n}^{-1}(x) \cap \Gamma = x \times S$, da S irreduzibel und die linke Seite der Gleichung abgeschlossen ist.
Damit gibt es wegen $r \geq 2$ Zahlen $i, j \in 1, \ldots, r$ mit $i \neq j$ und $x \in C_k^i \cap C_k^j$. Man erhält $x \in K$ und schließlich wegen $k' \notin N$ $x \in B$. ∎

Korollar 2.3.5. *Sei F eine irreduzible Fläche im $\mathbb{P}^n$ und $U^\vee \subseteq \mathbb{P}^{n\vee}$ die Menge aller Hyperebenen $H^\vee$, für die $H \cap F$ irreduzibel ist. Dann ist $U^\vee$ offen und nichtleer.*

Beweis. Die Basispunktmenge des linearen Systems $\{F \cap H \mid H^\vee \in \mathbb{P}^{n\vee}\}$ ist leer. Da aber für $H_1{}^\vee, H_2{}^\vee \in \mathbb{P}^{n\vee}$ der Schnitt $(F \cap H_1) \cap (F \cap H_2)$ nicht leer ist, können nach Satz 2.3.4 nicht alle $F \cap H$ reduzibel sein. Damit ist $U^\vee$ nichtleer. Die Offenheit von $U^\vee$ ergibt sich aus der Stetigkeit der Abbildung $\delta : \mathbb{P}^{n\vee} \to C_{1,d}(F)$ aus Satz 2.2.2 und der Offenheit von $C_{1,d}(F)^{irr}$. ∎

Zu den Sätzen dieses Paragraphen vergleiche man [24, S.203ff].

2.4 Haupttangenten und parabolische Punkte

In der Differentialgeometrie interessiert man sich für Parameterkurven C auf einer Fläche F, welche die Eigenschaft besitzen, daß in jedem Punkt $x \in C$ die Schmiegebene der Kurve mit der Tangentialebene der Fläche in x zusammenfällt. Solche Kurven heißen *Asymptotenlinien* und ihre Tangenten *Haupttangenten* der Fläche in x. Für algebraische Flächen im $\mathbb{P}^3$ wollen wir Haupttangenten durch den Schnitt zwischen Tangentialebene und quadratischer Polare definieren.

Definition: Sei $F \subset \mathbb{P}^3$ eine von einer Ebene verschiedene irreduzible Fläche und $x \in F^{sm}$. Als *quadratische Polare* in x an F bezeichnen wir die Quadrik mit der Gleichung

$$Q_x F : \sum_{i,j=0}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) y_i y_j = 0$$

in den Unbestimmten $y = (y_0, \ldots, y_3)$ wobei F die Nullstellenmenge des irreduziblen homogenen Polynoms $f \in k[x_0, \ldots, x_3]$ ist.

Sei $d := \deg F = \deg f$. Wendet man das *Eulersche Lemma* für homogene Polynome auf $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ an, so gilt für $j = 0, \ldots 3$

$$(d-1)\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \sum_{i=0}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) x_i. \tag{2.3}$$

Anwendung des Lemmas auf f ergibt unter Beachtung von (2.3)

$$d(d-1)f(x) = \sum_{i,j=0}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) x_i x_j. \tag{2.4}$$

Da die Körpercharakteristik Null ist und F keine Ebene ist, gilt daher:

$$x \in (Q_x F)^{sm} \text{ und } T_x F = T_x(Q_x F). \tag{2.5}$$

Denn für $x \in \operatorname{Sing}(Q_x F)$ wäre die rechte Seite von (2.3) Null. Deshalb ist entweder $T_x F \subseteq Q_x F$ oder der Schnitt $T_x F \cap Q_x F$ zerfällt in Geraden durch x, die wir nun als die *Haupttangenten* in x ansehen können. Deren geometrische Bedeutung erkennt man aus der Taylorformel:

$$f(x + \varrho y) = \underbrace{f(x)}_{=0} + \varrho \sum_{i=0}^{3} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) y_i + \varrho^2 \sum_{i,j=0}^{3} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) y_i y_j + \ldots \tag{2.6}$$

Es sind also diejenigen Geraden durch x, für deren Schnitt mit F x eine mindestens dreifache Nullstelle ist. Ein Punkt $x \in F^{sm}$ für den $T_x F \cap Q_x F$ in genau zwei Geraden zerfällt soll *nicht parabolisch*, alle anderen regulären Punkte aber sollen *parabolisch* heißen. Da die Tangentialebenen singularitätenfreier Quadriken, diese stets in zwei verschiedenen Geraden schneiden, folgt

$$x \text{ parabolisch} \Longleftrightarrow h(x) := \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)_{i,j=0,\ldots,3} = 0. \tag{2.7}$$

Die Fläche $H := V(h)$ heißt *Hessesche Fläche von F*. Also besagt (2.7): x parabolisch $\Longleftrightarrow x \in F^{sm} \cap H$. Der Durchschnitt $F \cap H$ ist entweder eine Kurve, oder aber ganz F. Im ersten Fall nennen wir $F \cap H$ die *parabolische Kurve* von F.
Um die Frage zu klären in welchem Fall $F \subseteq H$ gelten kann, betrachten wir die Abbildung $\Theta : F^{sm} \to F^{\vee}$ die durch

$$\Theta(x) := (T_x F)^{\vee} = (\frac{\partial f}{\partial x_0}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_3}(x)) \tag{2.8}$$

definiert und offensichtlich regulär ist. Nach Satz 1.4.1 ist Θ allgemein glatt, d.h. $T_x\Theta$ ist für x aus einer nichtleeren offenen Teilmenge $U \subseteq F^{sm}$ surjektiv.

Die Abbildungsmatrix von $T_x\Theta$ ist gerade die Hessematrix (siehe Paragraph 1.4)

$$M := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)_{i,j=0,\ldots,3}.$$

Also folgt $F \subseteq H$ genau dann, wenn $\dim \overline{\Theta(F^{sm})} = \dim F^\vee < 2$ und man erhält den

Satz 2.4.1. *Eine von einer Ebene verschiedene irreduzible Fläche F ist genau dann in ihrer Hesseschen Fläche H enthalten, wenn alle Punkte von F parobolisch sind, was wiederum genau dann zutrifft, wenn die duale Varietät $F^\vee$ von F eindimensional ist.*

Diejenigen Flächen F, für die $\dim F^\vee = 1$ gilt wollen wir fortan *Torsen* nennen. Nun werden die Haupttangenten in parabolischen Punkten mit Hilfe der Abbildung Θ charakterisiert.

Satz 2.4.2. *Sei F eine irreduzible Fläche im $\mathbb{P}^3$, $\deg F > 1$, $x \in F^{sm}$ und $g \subset T_xF$ eine Gerade, die x enthält. Dann gilt:*

$$T_x\Theta(g) = \Theta(x) = (T_xF)^\vee \Longleftrightarrow g \text{ ist Haupttangente im parabolischen Punkt } x.$$

Beweis. '$\Leftarrow$': Sei x parabolisch und g Haupttangente. Nach (2.7) ist die Hessematrix M singulär. Faßt man M als Darstellungsmatrix von Q_xF auf, so sieht man, daß Q_xF ein Kegel ist, dessen Spitze y wegen $g \subset T_x(Q_xF) \cap Q_xF$ (beachte (2.5)) auf g liegt. Aus $x \in (Q_xF)^{sm}$ folgt $x \neq y$. Faßt man nun M als Abbildungsmatrix von $T_x\Theta$ auf, so sieht man, daß alle Geraden durch y, insbesondere auch g, auf Punkte aus $T_{\Theta(x)}F^\vee$ abgebildet werden. Wegen (2.3) kann dies im Fall von g nur $\Theta(x)$ sein.
'$\Rightarrow$': Nach der Voraussetzung ist M (als Abbildungsmatrix von $T_x\Theta$) singulär, also x parabolisch (2.7). Da g auf einen Punkt abgebildet wird muß es ein (gemäß (2.5) von x verschiedenes) $y \in g$ geben mit $My = 0$. Dann ist y Spitze des Kegels Q_xF. Also ist g eine Erzeugende des Kegels und daher wegen $g = T_x(Q_xF) \cap Q_xF$ Haupttangente in x an F (beachte (2.5)). ■

Satz 2.4.3. *Sei $C \subseteq F \cap H$ eine irreduzible Komponente der parabolischen Kurve von F und für alle $x \in C^{sm} \cap F^{sm}$ sei T_xC Haupttangente in x an f. Dann gibt es eine Ebene $E \subset \mathbb{P}^3$, so daß $C \subseteq \mathrm{Cont}_E F$ gilt.*

Beweis. Sei $K^\vee := \overline{\Theta(C)}$. Die Abbildung $\Theta_{|C^{sm}}$ ist allgemein glatt, also gibt es ein nichtleeres offenes $C' \subseteq C^{sm}$, so daß für alle $x \in C'$ $T_x\Theta : T_xC \to T_{\Theta(x)}K^\vee$ surjektiv ist. Nach Satz 2.4.2 ist $T_x\Theta(T_xC) = \Theta(x)$ und daher $\dim T_{\Theta(x)}K^\vee = 0$ für alle $x \in C'$. Somit ist $K^\vee$ nulldimensional (für alle $E^\vee \in (K^\vee)^{sm}$ gilt ja $\dim T_{E^\vee}K^\vee = \dim K^\vee$) und irreduzibel (nach Satz 1.2.1 (b), da C irreduzibel) also ein Punkt $E^\vee$ im $\mathbb{P}^{3^\vee}$. Nun folgt: $C \subseteq \mathrm{Cont}_E F = \overline{\Theta^{-1}(E^\vee)}$. ■

Der folgende Satz wird nur für Flächen vierter Ordnung bewiesen, obwohl er sich recht einfach für beliebige Ordnung verallgemeinern läßt.

Satz 2.4.4. *Sei F eine irreduzible Fläche im $\mathbb{P}^3$, $\deg F = 4$, $\dim F^\vee = 2$ und $C = F \cap H$ die parabolische Kurve von F. Ferner sei $x \in C^{sm} \cap F^{sm}$ ein fester Punkt und g die Haupttangente in x an F. Dann gilt:*

$$g \subset F \ \vee \ g \cap F = \{x\} \iff g = T_x C$$

Beweis. Wähle Koordinaten so, daß $x = (1,0,0,0)$, $T_x F = V(x_3)$ und $g = V(\{x_2, x_3\})$ ist. Die Gleichung von $F = V(f)$ ist dann von der Gestalt:

$$f = x_0^3 x_3 + x_0^2(a_0 x_2^2 + x_3(a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)) + x_0 u_3 + u_4 \qquad (*)$$

wobei $a_0, \dots, a_3 \in k$, u_3, $u_4 \in k[x_1, x_2, x_3]$ mit $\deg u_3 = 3$, $\deg u_4 = 4$ gilt. Die Koeffizienten von u_3 bezeichnen wir durch

$$u_3 = \sum_{i_1+i_2+i_3=3} a_{i_1 i_2 i_3} x_1^{i_1} x_2^{i_2} x_3^{i_3}.$$

Mit M bezeichnen wir wieder die Hessematrix, und mit $H = V(h)$ die Hessefläche von F.
1. Fall: $x \in H^{sm}$ und $T_x F \neq T_x H$
In diesem Fall gilt $T_x C = T_x F \cap T_x H$. Seien $a, b, c \in k$ mit $T_x H = V(a x_1 + b x_2 + c x_3)$. Wegen $T_x C = V(\{x_3, a x_1 + b x_2 + c x_3\})$ genügt es $a = \frac{\partial h}{\partial x_1}(x) = 0$ zu zeigen. Aus $h = \det M$ ergibt sich mit der Kettenregel:

$$\frac{\partial h}{\partial x_k}(x) = \sum_{i,j=0}^{3} (-1)^{i+j} h_{ij}(x) \underbrace{\frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(x)}_{=:\beta_{ijk}} \qquad (**)$$

wobei h_{ij} die 3×3–Unterdeterminanten von h sind, die durch Streichen der i–ten Zeile und j–ten Spalte entstehen. Man berechnet nun die Hessematrix

$$M(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 2a_0 & a_2 \\ 3 & a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$$

und daraus

$$(h_{ij}(x))_{i,j=0,\dots,3} = \begin{pmatrix} -2a_0 a_1^2 & -6a_0 a_1 & 0 & 0 \\ -6a_0 a_1 & -18a_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nun ermittelt man die noch fraglichen Zahlen β_{ijk}: $\beta_{001} = 0$, $\beta_{011} = 0$, $\beta_{111} = 6a_{300}$, $\beta_{002} = 0$, $\beta_{012} = 0$, $\beta_{112} = 2a_{210}$, $\beta_{003} = 6$, $\beta_{013} = 2a_1$, $\beta_{113} = 2a_{201}$.

Also ergibt sich aus Gleichung $(**)$: $(a,b,c) = (3a_{300}, a_{210}, a_{201})$. Daraus resultiert folgende Äquivalenzkette: $g = T_xC \iff a_{300} = 0 \iff f(x_0, x_1, 0, 0) = a_{1111}x_1^4 \iff g \subset F \ \vee \ g \cap F = \{x\}$.
2. Fall: Gegenteil von Fall 1.
Der zweite Fall tritt in $(*)$ genau dann auf, wenn $a_{300} = 0$ und $a_{210} = 0$ ist, denn für $a_{210} \neq 0$ oder $a_{300} \neq 0$ folgt sofort $x \in H^{sm}$ und $T_xH = V(3a_{300}x_1 + a_{210}x_2 + a_{201}x_3) \neq T_xF$. Man kann den Fall 2 durch Grenzübergang aus dem ersten gewinnen. Man betrachte die beiden folgenden algebraischen Familien von Flächen: Das lineare System $F_z := V(\lambda f + \mu x_0 x_1^2 x_2)$ für $z := (\lambda, \mu) \in \mathbb{P}^1$ und die Hesseflächen H_z zu F_z. Für F_z gilt nun $a_{300} = 0$ und $a_{210} = \mu$, so daß auf diese Flächen der erste Fall angewandt werden kann. Die parabolischen Kurven $C_z = F_z \cap H_z$ von F_z durchlaufen ebenfalls eine algebraische Familie von Kurven (dazu schneide man die zu $\{F_z \mid z \in \mathbb{P}^1\}$ und $\{H_z \mid z \in \mathbb{P}^1\}$ gehörigen Mengen $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^1$). Nun gilt $x \in {C_z}^{sm}$ für alle $z \in \mathbb{P}^1$ und $T_xC_z = g = T_xF_z \cap T_xH_z$ für alle $z \neq (\lambda, 0)$. Ist nun $\{C_z \mid z \in \mathbb{P}^1\}$ durch $\Gamma = \Gamma_1 \cap \Gamma_2 \subset \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^1$ gegeben und sind $f_1, \ldots, f_r$ Polynome deren Nullstellenmenge Γ ist, so haben die Tangenten T_xC_z die linearen Gleichungen $\sum_{i=0}^3 \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x,z) y_i = 0$ $(j = 1, \ldots, r)$ in den Unbestimmten y_i. Für $z \in \mathbb{P}^1 \backslash \{(\lambda, 0)\}$ ist dann wegen $g = T_xC_z$ $\frac{\partial f_j}{\partial x_0}(x,z) = \frac{\partial f_j}{\partial x_1}(x,z) = 0$ für $j = 1, \ldots, r$. Folglich verschwinden diese Polynome identisch in z und da wir $x \in C^{sm}$ vorausgesetzt haben, ergibt sich $T_xC = T_xC_{(\lambda,0)} = g$ (zum Beweis vergleiche man [16, S.648]). ■

Zu den Ausführungen dieses Paragraphen siehe [4, S.637, 652 u. 665] sowie [16, S.29].

2.5 Einiges über Regelflächen

Die Menge aller Geraden des $\mathbb{P}^3$ identifizieren wir im folgenden anstelle der Chow–Varietät $C_{1,1}(\mathbb{P}^3)$ mit der *Plückerquadrik* im $\mathbb{P}^5$, die wir mit P bezeichnen. Es wird daran erinnert, daß die *Plückerkoordinaten* einer Gerade $g \subset \mathbb{P}^3$ mittels zweier verschiedener Punkte $x, y \in g$ durch die 6 Unterdeterminanten p_{ij} der Matrix $A := \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ berechnet werden, wobei i, j für die entsprechenden Spalten von A stehen. Entsprechend der Menge $\Gamma_{1,1}$ aus Satz 2.2.1 erhält man die abgeschlossene Menge $\Gamma_1 := \{(x, g) \in \mathbb{P}^3 \times P \mid x \in g\}$. Die Gleichungen von Γ_1 sind: $\sum_{i=0}^3 p_{ij}x_i = 0$ für $j = 0, \ldots 3$ und die der Plückerquadrik ist: $p_{01}p_{23} - p_{02}p_{13} + p_{03}p_{12} = 0$. Damit können wir fortan algebraische Familien von Geraden durch Untervarietäten der Plückerquadrik definieren. Andererseits sieht man in Analogie zu Satz 2.1.1 leicht, daß die Menge aller Geraden auf einer projektiven Fläche F eine Untervarietät der Plückerquadrik P darstellt, die wir mit $P(F)$ bezeichnen wollen (siehe [21, S.63]). Umgekehrt ist zu einer eindimensionalen projektiven Varietät $S \subset P$ die Menge

$$F_S := \{x \in \mathbb{P}^3 \mid \exists g \in S \;\; x \in g\} \tag{2.9}$$

eine projektive Fläche, denn mit $\Gamma_S := pr_P^{-1}(S) \cap \Gamma_1$ sieht man mit Satz 1.2.2 (angewandt auf pr_P) $\dim \Gamma_S = 2$ und da $F_S = pr_{\mathbb{P}^3}(\Gamma_S)$ offenbar nicht eindimensional sein kann, liefert derselbe Satz $\dim F_S = 2$.

Als *Regelflächen* sollen hier irreduzible projektive Flächen bezeichnet werden, die mit jedem Punkt eine Gerade durch diesen enthalten. Die Flächen F_S sind also solche. Die Regelflächen des $\mathbb{P}^3$ sind durch die Bedingung $\dim P(F) \geq 1$ gekennzeichnet. Eine besondere Behandlung der Regelflächen ist hier deshalb von Interesse, weil für sie offenbar stets $\dim C_{1,2}(F) \geq 1$ gilt, obwohl durchaus $\dim C_{1,2}(F)^{irr} = 0$ oder sogar $C_{1,2}(F)^{irr} = \emptyset$ sein kann. Daher werden uns die Regelflächen im Kapitel 3 besondere Mühe bereiten.

Satz 2.5.1. *Sei F eine von einer Ebene verschiedene Regelfläche im $\mathbb{P}^3$ und C eine irreduzible Kurve auf F. Falls C selbst eine Gerade ist, werde vorausgesetzt, daß jeder Punkt von C auf einer weiteren Gerade von F liegt. Dann gibt es zu jedem $x \in F$ eine Gerade $g \in P(F)$ mit $x \in g$ und $g \cap C \neq \emptyset$*

Beweis. Die Menge $K_C := \{g \in P \mid g \cap C \neq \emptyset\}$ definiert einen *Geradenkomplex* (Schnitt von P mit einer abgeschlossenen Hyperfläche im $\mathbb{P}^5$, deren Gleichung man etwa durch geeignete Substitution aus der zugeordneten Form f_C von C erhält). Die Menge $S := K_C \cap P(F)$ ist eine projektive Varietät, die nach der Voraussetzung des Satzes mindestens eindimensional ist (durch jeden Punkt von C gibt es eine von C verschiedene Gerade aus $P(F)$, die ihn enthält). Nun ist aber $P(F)$ genau eindimensional, denn wäre $\dim P(F) \geq 2$, so müßte F ein Kegel sein und jeder ihrer Punkte eine Spitze davon, was aber nur für Ebenen möglich ist (beachte, daß durch jeden Punkt von F in diesem Fall eine einparametrige Familie von Geraden gehen muß). Damit ist $\dim S = 1$ und man kann die oben definierte Fläche F_S (2.9) betrachten. Offensichtlich gilt $F_S \subseteq F$, und da F irreduzibel ist, folgt $F_S = F$, wodurch der Satz gezeigt ist. ∎

Korollar 2.5.2. *Sei F eine Regelfläche im $\mathbb{P}^3$ und E eine Ebene mit $E \neq F$. Dann besitzt die Schnittkurve $E \cap F$ höchstens eine irreduzible Komponente, die keine Gerade ist.*

Beweis. Man kann annehmen, daß F keine Ebene ist. Wir nehmen nun zwei verschiedene irreduzible Kurven $C, C' \subset E \cap F$ an, die keine Geraden sind. Nun gibt es ein $x \in C \backslash \overline{((E \cap F) \backslash C)}$ und dazu nach Satz 2.5.1 eine Gerade g mit $x \in g \subset F$ und $g \cap C' \neq \emptyset$. Weil nun g zwei verschieden Punkte von E enthält, hat man $g \subset E$. Das kann aber nur im Fall $g \subset \overline{(E \cap F) \backslash C}$ möglich sein, da C ja keine Gerade ist und dies würde $x \in \overline{(E \cap F) \backslash C}$ bedeuten im Widerspruch zur Wahl von x. ■

Satz 2.5.3. *Sei F eine Regelfläche im $\mathbb{P}^3$ und* $\deg F \geq 3$. *Dann ist $P(F)$ eindimensional und der rein eindimensionale Anteil $P(F)^1$ von $P(F)$ irreduzibel.*

Beweis. Daß die Dimension von $P(F)$ nur im Fall einer Ebene F größer als 1 sein kann, wurde bereits im Beweis von Satz 2.5.1 bemerkt. Wir nehmen nun an, daß sich $P(F)^1$ in $r \geq 2$ irreduzible Komponenten $C_1 \cup \ldots \cup C_r = P(F)^1$ zerlegen läßt. Da F irreduzibel ist folgt $F = F_{C_i}$ für $i = 1, \ldots, r$ (Bez. gemäß (2.9)). Für $j \neq 1$ ist $M_j := C_1 \backslash C_j$ nichtleer und offen in C_1. Zu jeder Gerade $g \in M_j$ und jedem $x \in g$ gibt es eine Gerade $h_x \in C_j$ mit $x \in h_x$ (da $F = F_{C_j}$) und weil für zwei verschiedene Punkte $x, y \in g$ $h_x \neq h_y$ gilt, folgt $C_j \subset K_g$, wobei $K_g := \{h \in P \mid g \cap h \neq \emptyset\}$ den *speziellen linearen Geradenkomplex* mit Leitgerade g darstellt. Die Polarenabbildung $\pi : \mathbb{P}^5 \to \mathbb{P}^{5^\vee}$ bezüglich der Plückerquadrik (diese besitzt die Darstellungsmatrix der Plückerquadrik als Abbildungsmatrix) bildet P auf $P^\vee$ ab. Sei $H_g \subset \mathbb{P}^5$ diejenige Hyperebene, die dem Punkt $\pi(g) \in \mathbb{P}^{5^\vee}$ entspricht ($H_g{}^\vee = \pi(g)$). Dann gilt $H_g = T_g P$ und aus allgemein bekanntem über spezielle lineare Geradenkomplexe folgt $K_g = P \cap H_g$. Sei $D_1{}^\vee := \pi(C_1)$ und $L^\vee$ die projektive Hülle von $D_1{}^\vee$ (kleinster Unterraum, welcher $D_1{}^\vee$ enthält). Wenn etwa die s linear unabhängigen Punkte $H_{g_1}{}^\vee, \ldots, H_{g_s}{}^\vee$ mit $g_1, \ldots, g_s \in C_1$ den Raum $L^\vee$ aufspannen, so gilt $L := L^{\vee\vee} = H_{g_1} \cap \ldots \cap H_{g_s}$. Wegen $C_j \subseteq P \cap H_g$ für alle $g \in C_1 \backslash C_j$ erhält man $C_j \subseteq L$ und wegen $D_1{}^\vee \subseteq L^\vee$ ist sicherlich $\dim L^\vee \geq 1$.

1. Fall: $\dim L^\vee = 1$

Dann ist $C_1 = \pi^{-1}(D_1{}^\vee)$ eine Gerade (da π Projektivität). Demnach bilden die zu C_1 gehörigen Geraden ein in einer Ebene $E \subset \mathbb{P}^3$ gelegenes Geradenbüschel. Das würde aber $E \subset F$ bedeuten, was unmöglich ist.

2. Fall: $\dim L^\vee \geq 3$

In diesem Fall folgt $\dim L = 1$, so daß C_j notwendigerweise eine Gerade ist, und man erhält denselben Widerspruch wie im ersten Fall.

3. Fall: $\dim L^\vee = 2$

Nun ist C_1 in der Ebene $R := \pi^{-1}(L^\vee) \subset \mathbb{P}^5$ enthalten. Im Unterfall $R \not\subset P$ ist C_1 ein Kegelschnitt auf P. In diesem Fall sieht man $\deg F = 2$, da für eine beliebige Gerade $h \in P$ der Komplex K_h den Kegelschnitt C_1 enthält oder in zwei Elementen schneidet. Wegen $F = F_{C_1}$ bedeutet dies aber entweder $h \subset F$ oder $card(h \cap F) \leq 2$, woraus mit Satz 2.1.3 $\deg F \leq 2$ folgt. Für den Fall, daß $R \subset P$ gilt, liegen entweder alle Geraden von R in einer festen Ebene $E \subset \mathbb{P}^3$, woraus sich abermals der Widerspruch $E \subseteq F$ ergibt, oder alle Geraden von R gehen durch einen festen Punkt $x \in \mathbb{P}^3$ und F ist folglich ein Kegel mit Spitze x. Da es nach Voraussetzung auf F noch eine Gerade $l \subset F$ mit $x \notin l$ geben muß, sieht man, daß nun die Verbindungsebene von x und l in F enthalten ist (durch jeden Punkt von l gibt es eine Gerade von C_1), was wiederum nicht sein kann. ■

Es wird an den letzten Paragraphen erinnert, in dem *Torsen* als irreduzible projektive Flächen des $\mathbb{P}^3$ eingeführt wurden, deren duale Varietät eine Kurve im $\mathbb{P}^{3\vee}$ ist.

Satz 2.5.4. *Sei F eine Torse. Dann ist der Berührort jeder Ebene $E^\vee \in F^\vee$ eine Gerade von F. Insbesondere ist also F eine Regelfläche.*

BEWEIS. Die Conormale Varietät CF der Fläche F ist ebenfalls zweidimensional (vgl. Beweis von Satz 1.6.4). Daher gilt für alle $E^\vee \in F^\vee$: $\dim \mathrm{Cont}_E F = 1$. Also ist $\{\mathrm{Cont}_E F \mid E^\vee \in F^\vee\}$ eine algebraische Familie. Betrachte die nach Satz 2.2.2 existierende Abbildung $\delta : F^\vee \to C_{1,d}(F)$. Nach Satz 1.6.3 und 2.2.2 ist $d = 1$. Aus $\mathrm{Cont}_E F = \mathrm{supp}\, Z_{\delta(E^\vee)}$ folgt nun die Behauptung. ■

Als nächstes soll gezeigt werden, daß für Regelflächen F der singuläre Ort $\mathrm{Sing}\, F$ stets eindimensional ist. Zur Vorbereitung dient folgendes wichtige Lemma, das auch im weiteren Verlauf so häufig verwendet wird, daß nicht jedesmal Bezug darauf genommen werden kann. Die Schnitte einer Hyperfläche X mit einer Hyperebene H werden wir des öfteren als einen Divisor von H auffassen, und zwar auf folgende Weise: Das homogene Polynom f (ohne mehrfache Faktoren), dessen Nullstellenmenge X ist, induziert auf H einen sogenannten *lokalen Hauptdivisor* von H (siehe [21, S.132]). Die Vielfachheiten seiner Komponenten ermittelt man am einfachsten, indem man Koordinaten so wählt, daß $H = V(x_n)$ gilt, und die Vielfachheiten der irreduziblen Faktoren des Polynoms $f_{|x_n=0} := f(x_0, \ldots, x_{n-1}, 0) \in k[x_0, \ldots, x_{n-1}]$ betrachtet. Um diesen Divisor vom mengentheoretischen Schnitt $X \cap H$ zu unterscheiden, schreiben wir: $(X \cap H)^{div}$ (vgl. Bemerkung 2.1.6). Man erinnere sich an die Definition der Vielfachheit $\mu_x(D)$ eines Punktes x bezüglich eines Divisors D ((1.2), (2.1)).

Lemma 2.5.5. *Sei X eine Hyperfläche und H eine Hyperebene im $\mathbb{P}^n$. Dann gilt für $x \in H$:*

(a) $\mu_x(X) \leq \mu_x((X \cap H)^{div})$

(b) $\mu_x(X) < \mu_x((X \cap H)^{div}) \iff H \subseteq TC_x F$

BEWEIS. Wähle Koordinaten so, daß $x = (1, 0, \ldots, 0)$ und $H = V(x_n)$ ist. Ist nun X Nullstellenmenge des Polynoms f, so besitzt f die Form (vgl Paragraph 1.5):

$$f = x_0^{m-s} g_s + x_0^{m-s-1} g_{s+1} + \ldots + g_m$$

wobei $g_i \in k[x_1, \ldots, x_n]$ homogen vom Grad i sind. Nun entspricht dem Divisor $(X \cap H)^{div}$ das homogene Polynom

$$f_{|x_n=0} = x_0^{m-s} g_{s|x_n=0} + \ldots + g_{m|x_n=0}$$

woraus die Behauptung des Lemmas wegen $TC_xF = V(g_s)$ folgt (beachte, daß $g_{s|x_n=0} \equiv 0$ genau dann gilt, wenn g_s von x_n geteilt wird). ■

Satz 2.5.6. *Für eine Regelfläche F mit* $\deg F \geq 3$ *gilt* $\dim \operatorname{Sing} F = 1$ *oder F ist ein Kegel.*

Beweis. Sei zunächst F eine von einem Kegel verschiedene Torse (d.h. es gilt $\dim F^\vee = 1$). Sei $g \subset F$ eine Erzeugende, d.h. es gebe eine Ebene $E \subset \mathbb{P}^3$ mit $g = \operatorname{Cont}_E F$. Da sicherlich $F^\vee$ irreduzibel (wende Satz 1.2.1 auf die Abbildung Θ aus Paragraph 2.4 an) und daher $F^\vee \not\subset g^\vee$ ist, gibt es eine Ebene $E'^\vee \in g^\vee \backslash F^\vee$. Diese schneidet F in g und einer weiteren Kurve C und es gibt einen Punkt $x \in C \cap g$. Für einen solchen gilt aber $\mu_x((F \cap E')^{div}) = \mu_x(C) + \mu_x(g) \geq 2$. Wäre x regulär, so wäre $E' = T_xF$ (Lemma 2.5.5) im Widerspruch zur Wahl $E'^\vee \notin F^\vee$. Damit gibt es auf jeder Erzeugenden von F einen singulären Punkt, und da F kein Kegel ist, folgt $\dim \operatorname{Sing} F = 1$.
Nun betrachten wir den Fall $\dim F^\vee = 2$. Es wird wieder die Abbildung $\Theta : F^{sm} \to F^\vee$ aus Paragraph 2.4 verwendet. Nach Satz 2.4.1 ist $U := F^{sm} \backslash (H \cup \Theta^{-1}(\operatorname{Sing} F^\vee))$ offen und nichtleer ($H=$ Hessefläche!). Sei $g \subset F$ eine Gerade mit $g \cap U \neq \emptyset$. Derartige Geraden bilden eine nichtleere offene Teilmenge von $P(F)$. Zu $x \in g \cap U$ betrachte man die Ebene $E := T_xF$. Sei C der Divisor mit $(F \cap E)^{div} = g + C$. Nach Satz 2.1.4 ist $\deg C \geq 2$. Nun ist $\mu_x(g + C) = 2$, denn wäre $\mu_x(g+C) \geq 3$, so wäre T_xF in der quadratischen Polaren Q_xF enthalten (siehe (2.6)), also x parabolisch im Gegensatz zur Wahl $x \notin H$. Daher gilt $\mu_x(C) = 2 - \mu_x(g) = 1$. Die Tangente T_xC ist von g verschieden, da sie genauso wie g eine Haupttangente ist (siehe (2.6)) und x kein parabolischer Punkt ist. Nun ergibt Satz 2.1.5 $(C, g)_x = 1$ und nach Satz 2.1.4 gibt es wegen $\deg C \geq 2$ einen von x verschiedenen Schnittpunkt y zwischen g und C. Aus $(T_xF)^\vee \notin \operatorname{Sing} F^\vee$ ergibt sich, daß der Berührort von T_xF und F gerade x ist und daher liefert Lemma 2.5.5 $y \in \operatorname{Sing} F$ (wegen $\mu_y((F \cap E)^{div}) = \mu_y(g) + \mu_y(C) \geq 2$). Also enthalten alle bis auf endlich viele Geraden auf F einen singulären Punkt, woraus wiederum $\dim \operatorname{Sing} F = 1$ folgt. ■

Als weitere Anwendung von Lemma 2.5.5 wird schließlich noch ein Satz angefügt, den man sehr einfach aus Korollar 2.5.2 erhält und der im Kapitel 3 zahlreiche Anwendungen findet. Es wird daran erinnert, daß hier unter einem Kegelschnitt stets eine irreduzible Kurve zweiter Ordnung verstanden wird. Die eindeutig bestimmte Ebene des $\mathbb{P}^3$, in der diese liegt, wird als die zugehörige *Trägerebene* bezeichnet.

Satz 2.5.7. *Sei F eine Regelfläche vierter Ordnung im $\mathbb{P}^3$ und $C_2 \subset F$ sowie $C_2 \not\subseteq \operatorname{Sing} F$ ein Kegelschnitt mit Trägerebene E. Dann gibt es (eventuell übereinstimmende) Geraden $g_1, g_2 \subset F$, so daß $(F \cap E)^{div} = C_2 + g_1 + g_2$ gilt.*

Beweis. Angenommen, es wäre $(F \cap E)^{div} = C_2 + C_2'$ mit einem Kegelschnitt C_2', so ist $C_2 = C_2'$ nach Korollar 2.5.2. Wegen $C_2 \not\subseteq \operatorname{Sing} F$ ist aber auch dies nicht möglich, denn für einen (bezüglich F) regulären Punkt $x \in C_2$ erhält man aus der Bedingung $\mu_x((F \cap E)^{div}) = \mu_x(2C_2) = 2$ mit Lemma 2.5.5 $T_xF = E$. Nun existiert eine Gerade $g \subset F$ mit $x \in g$, da F eine Regelfläche ist, und es ergibt sich der Widerspruch $g = T_xg \subset T_xF = E$. Wegen $\deg (F \cap E)^{div} = 4$ bleibt daher nur noch die im Satz angegebene Möglichkeit übrig. ■

2.6 Sonstige Hilfssätze

Satz 2.6.1. *Sei F eine irreduzible Fläche im $\mathbb{P}^3$ mit einer irreduziblen Kurve $C \subseteq \operatorname{Sing}_r F$ (Bez. siehe 1.5), die aber nicht in $\operatorname{Sing}_{r+1} F$ enthalten ist, für ein $r \in \mathbb{N}$ gegeben. Dann gilt für alle $x \in C^{sm} \setminus \operatorname{Sing}_{r+1} F$ (offen in C!):*

$$(TC_xF)^{\vee} \subseteq (T_xC)^{\vee},$$

d.h. TC_xF zerfällt in Ebenen durch T_xC.

Beweis. Der Nachweis wird durch vollständige Induktion über r geführt. Im Fall $r = 1$ ist die Behauptung des Satzes sofort klar, da nun $TC_xF = T_xF$ gilt. Für $r \geq 2$ nehme man die Gültigkeit des Satzes für alle $s \leq r - 1$ an. Zunächst sei bemerkt, daß

$$T_xC \subset TC_xF \text{ für alle } x \in C^{sm} \tag{$*$}$$

gilt. Denn das irreduzible homogene Polynom f, dessen Nullstellenmenge F ist, ist auf Grund von $C \subset F$ im homogenen Ideal $I(C)$ enthalten. Schreibt man für $x \in C^{sm}$ das Polynom f in der Gastalt (1.1), so gilt nach Definition des Tangentenkegels $TC_xC \subset V(f_{d-m}) = TC_xF$. Unter Berücksichtigung von $T_xC = TC_xC$ folgt $(*)$.
Sei nun F und C mit $C \subseteq \operatorname{Sing}_r F$, $C \not\subseteq \operatorname{Sing}_{r+1} F$ und $x \in C^{sm} \setminus \operatorname{Sing}_{r+1} F$ gegeben. Da der Satz für $m := \deg F \leq 2$ klar ist (hier gilt stets $r = 0$, da F höchstens eine Singularität besitzt), kann man $m > 2$ annehmen und Koordinaten so wählen, daß $x = (1,0,0,0)$ und $T_xC = V(\{x_2, x_3\})$ ist. Es folgt $f = x_0^{m-r} g_r + x_0^{m-r-1} g_{r+1} + \ldots + g_m$ mit $g_i \in k[x_1, x_2, x_3]$ homogen vom Grad i und $g_r \not\equiv 0$ (also $TC_xF = V(g_r)$). Es ist zu zeigen, daß nun sogar $g_r \in k[x_2, x_3]$ ist. Nehme zunächst $\frac{\partial g_r}{\partial x_2} \not\equiv 0$ an.
Mit D bezeichnen wir den zur homogenen Form $\frac{\partial f}{\partial x_2}$ gehörigen Divisor: $D =$

$\sum_{i=1}^{l} k_i D_i$, wobei D_i Primdivisoren (= irreduzible Flächen) sind. Die Charakterisierung (1.2) der Vielfachheiten $\mu_x(X)$ bleibt, wie schon bemerkt, auch für Divisoren des $\mathbb{P}^n$ richtig, so daß für alle $y \in C \quad \mu_y(D) \geq r-1$ und wegen $\frac{\partial g_r}{\partial x_2} \not\equiv 0$ darüberhinaus

$$\mu_x(D) = r - 1 = \sum_{i=1}^{l} k_i \underbrace{\mu_x(D_i)}_{=:r_i} \qquad (**)$$

gilt (Bemerkung im Anschluß an Gleichung (1.2)). Seien nun s_i die eindeutig bestimmten Zahlen mit $C \subseteq \operatorname{Sing}_{s_i} D_i$ und $C \not\subseteq \operatorname{Sing}_{s_i+1} D_i$. Zunächst gilt sicherlich $r_i \geq s_i$ für $i = 1, \ldots, l$. Angenommen es gäbe ein i_0 mit $r_{i_0} > s_{i_0}$. Dann müßte es auch eine nichtleere offene Menge $U \subseteq C^{sm}$ geben, so daß für alle $y \in U$ die Vielfachheit $\mu_y(D)$ kleiner als $r-1$ ist (nach $(**)$), was aber bereits ausgeschlossen wurde. Damit gilt $r_i = s_i$ und $s_i \leq r-1$. Nun kann man für $r_i > 0$ die Induktionsvoraussetzung auf die Flächen D_i und die Kurve C anwenden, denn es gilt für alle i: $x \in \operatorname{Sing}_{r_i} D_i$ und $x \notin \operatorname{Sing}_{r_i+1} D_i$. Aus $(TC_x D_i)^\vee \subseteq (T_x C)^\vee$ folgt wegen $TC_x(D_1 \cup \ldots \cup D_r) = V(\frac{\partial g_r}{\partial x_2})$ zunächst $\frac{\partial g_r}{\partial x_2} \in k[x_2, x_3]$. Auf völlig analoge Weise sieht man $\frac{\partial g_r}{\partial x_3} \in k[x_2, x_3]$. Nun schreibt man $g_r = \lambda x_1^r + x_1^{r-1} h_1 + \ldots + h_r$ mit $h_i \in k[x_2, x_3]$. Aus $\frac{\partial g_r}{\partial x_2} \in k[x_2, x_3]$ oder $\frac{\partial g_r}{\partial x_2} \equiv 0$ folgt $h_1, \ldots, h_{r-1} \in k[x_3]$ und aus derselben Bedingung für die Ableitung nach x_3 andererseits $h_1, \ldots, h_{r-1} \in k[x_2]$, also $h_1, \ldots, h_{r-1} \equiv 0$ (beachte, daß die Körpercharakteristik von k Null ist). Man erhält $g_r = h_r + \lambda x_1^r$ mit $h_r \in k[x_2, x_3]$ und $\lambda \in k$. Aus $(*)$ folgt nun $\lambda = 0$ womit der Satz gezeigt ist. ∎

Korollar 2.6.2. *Sei F eine irreduzible projektive Fläche im $\mathbb{P}^3$ und $T^\vee \subseteq F^\vee$ eine eindimensionale abgeschlossene Untervarietät der dualen Varietät von F. Dann gibt es eine nichtleere offene Menge $\widetilde{T^\vee}$ von $T^\vee$, so daß für alle $E^\vee \in \widetilde{T^\vee}$ die Enthaltenseinsbeziehung $\operatorname{Cont}_E F \subseteq \operatorname{Cont}_E T$ gilt ($T := T^{\vee\vee}$).*

Beweis. Für $\dim F^\vee = 1$ folgt $T^\vee = F^\vee$ und die Behauptung ergibt sich aus der Bidualität von F. Im Fall $\dim F^\vee = 2$ gibt es eine nichtleere offene Menge $\widetilde{T^\vee} \subseteq (T^\vee)^{sm}$ derart, daß für alle $E^\vee \in \widetilde{T^\vee} \quad \dim \operatorname{Cont}_E F = 0$ und nach Satz 2.6.1 weiterhin $(TC_{E^\vee} F^\vee)^\vee \subseteq (T_{E^\vee} T^\vee)^\vee$ gilt. Nun liefert Teil (b) von Satz 1.6.2 $\operatorname{Cont}_E F = (TC_{E^\vee} F^\vee)^\vee$ und Teil (a) des gleichen Satzes ergibt $(T_{E^\vee} T^\vee)^\vee \subseteq \operatorname{Cont}_E T$ (vgl. auch Beweis von Satz 1.6.3), was zusammengenommen die Behauptung des Korollars ergibt. ∎

Bemerkung: T ist eine Torse oder Gerade. Nach Satz 2.5.4 ist daher $\operatorname{Cont}_E F$ für die betreffenden Ebenen E in einer Geraden enthalten.

Satz 2.6.3. *Sei $\{C_s \mid s \in S\}$ eine eindimensionale irreduzible algebraische Familie von irreduziblen ebenen Kurven C_s mit $\deg C_s > 1$. Dann ist $T^\vee :=$*

$\{E^\vee \in \mathbb{P}^{3^\vee} \mid \exists s \in S : \; C_s \subset E\}$ *eine irreduzible Varietät mit* $\dim T^\vee \leq 1$, *die wir* Varietät der Trägerebenen von $\{C_s \mid s \in S\}$ *nennen.*

Beweis. Sei $I \subset \mathbb{P}^{3^\vee} \times \mathbb{P}^3$ die Inzidenzrelation: $(E^\vee, x) \in I :\Longleftrightarrow x \in E$. Offensichtlich ist I eine projektive Varietät. Die Parametervarietät S sei in $\mathbb{P}^m$ enthalten und $\Gamma \subseteq \mathbb{P}^3 \times S$ die abgeschlossene Menge, durch welche die gegebene algebraische Familie definiert ist. Betrachte die Varietät $A := (\mathbb{P}^{3^\vee} \times \Gamma) \cap (I \times S) \subset \mathbb{P}^{3^\vee} \times \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^m$. Da $pr_{\mathbb{P}^{3^\vee} \times \mathbb{P}^m}$ auf $\overline{A}$ regulär ist, ist auch $B := pr_{\mathbb{P}^{3^\vee} \times \mathbb{P}^m}(A)$ eine Varietät (Satz 1.2.1 (d)). Nach Satz 1.2.2 ist die Menge $C := \{(E^\vee, s) \in \mathbb{P}^{3^\vee} \times S \mid \dim\,(pr^{-1}_{\mathbb{P}^{3^\vee} \times \mathbb{P}^m}(E^\vee, s) \cap A) \geq 1\}$ abgeschlossen in B, und daher ist mit dem gleichen Argument wie oben auch $D^\vee := pr_{\mathbb{P}^{3^\vee}}(C)$ eine Varietät.
Behauptung: $T^\vee = D^\vee$.
'$T^\vee \supseteq D^\vee$': Zu $E^\vee \in D^\vee$ gibt es ein $s \in S$ mit $\dim\,(pr^{-1}_{\mathbb{P}^{3^\vee} \times \mathbb{P}^m}(E^\vee, s) \cap A) \geq 1$. Das heißt aber $\dim\,(E \cap C_s) \geq 1$ und weil C_s irreduzibel ist, erhält man $C_s \subset E$ also $E^\vee \in T^\vee$.
'$T^\vee \subseteq D^\vee$': Zu $E^\vee \in T^\vee$ gibt es ein $s \in S$ mit $C_s \subset E$. Demzufolge gilt $\dim\,(pr^{-1}_{\mathbb{P}^{3^\vee} \times \mathbb{P}^m}(E^\vee, s) \cap A) \geq 1$ und folglich $E^\vee \in D^\vee$.
Um $\dim T^\vee \leq 1$ zu zeigen, wird zunächst bemerkt, daß für alle $s \in S$ wegen der Irreduzibilität von C_s und $\deg C_s > 1$ die Faser $pr_S^{-1}(s) \cap B$ (in $\mathbb{P}^{3^\vee} \times S$) nulldimensional ist, weil somit C_s nur in einer Ebene liegen kann. Da nun die Parametervarietät S nach Voraussetzung eindimensional ist, folgt $\dim B = 1$ und daraus $\dim T^\vee \leq 1$.
Wäre $T^\vee$ reduzibel, so notwendigerweise nach Definition von $D^\vee$ auch C. Da die Einschränkung der Projektion pr_S auf C jedoch injektiv ist, kann dies auf Grund der Irreduzibilität von S nicht sein. ∎

Kapitel 3

Klassifikation

Nun wenden wir uns der Klassifikation der *Quartiken* F_4 (irreduzible projektive Flächen des $\mathbb{P}^3$ von viertem Grad) zu, welche eine einparametrige algebraische Familie von Kegelschnitten besitzen, für die also $\dim C_{1,2}(F_4)^{irr} \geq 1$ gilt. Unter Kegelschnitten werden stets irreduzible Kurven zweiter Ordnung verstanden. Das Symbol F_d verwenden wir durchgehend für irreduzible Flächen des $\mathbb{P}^3$, falls es nötig ist, ihre Ordnung d hervorzuheben, während die irreduziblen Kurven des dreidimensionalen Raumes durch C_d bezeichnet werden. Falls klar ist, um welchen Grad es sich handelt oder wenn dieser unwichtig ist, schreiben wir allerdings kurz: F bzw. C. Bei der Verwendung des Begriffs *Quartik* soll auch durchweg angenommen werden, daß es sich nicht um einen Kegel handelt. Man sieht nämlich leicht, daß letztere überhaupt keine Kegelschnitte enthalten, und daher in dieser Klassifikation generell ausscheiden (Ebenen, welche die Kegelspitze nicht enthalten schneiden in einer irreduziblen Kurve 4. Ordnung, die übrigen aber in lauter Geraden durch die Spitze).

Im ersten Paragraphen des Kapitels werden diejenigen Quartiken behandelt, die höchstens *isolierte Singularitäten* besitzen, d.h. für die $\dim(\operatorname{Sing} F) = 0$ oder $\operatorname{Sing} F = \emptyset$ ist. Es wird sich dort zeigen, daß in letzterem Fall keine derartigen Quartiken existieren, während es zwei Typen mit isolierten Singularitäten gibt. Darauf wird eine Einteilung der Quartiken mit eindimensionalem singulärem Ort vorgenommen. Entsprechend dieser Einteilung werden anschließend die Dimension von $C_{1,2}(F)^{irr}$ und — soweit möglich — die Zahl der irreduziblen Komponenten davon ermittelt. Eine große Hilfe hierbei wird die Klassifikationsmethode von *C. Segre* sein, bei der Quartiken als Projektion einer Schnittfläche von zwei Quadriken des $\mathbb{P}^4$ von einem nicht auf dieser gelegenen Punkt auf eine Hyperebene dargestellt werden. Die allgemeinen Aspekte dieser Methode werden in Paragraph 3.4 behandelt.

3.1 Quartiken mit höchstens isolierten Singularitäten

In diesem Paragraphen sei $\{K_s \mid s \in S\}$ stets eine einparametrige algebraische Familie von Kegelschnitten, die auf der Quartik F liegen. Nach Satz 2.2.2 und Satz 1.2.1 (c) können wir o.B.d.A. $S \subseteq C_{1,2}(F)^{irr}$ und S als irreduzibel annehmen. Nach Satz 2.6.3 ist die Menge $T^\vee \subset \mathbb{P}^{3\vee}$ der zugehörigen Trägerebenen eine eindimensionale irreduzible Varietät. Die (abgeschlossene) Inzidenzrelation $I := \{(x, E^\vee) \in F \times T^\vee \mid x \in E\}$ definiert die algebraische Familie $\{F \cap E \mid E^\vee \in T^\vee\}$ der *ebenen Schnitte* von F mit Ebenen aus $T^\vee$.

Satz 3.1.1. *Falls die Quartik F höchstens isolierte Singularitäten besitzt, so gibt es eine nichtleere offene Teilmenge $\widetilde{T^\vee} \subseteq T^\vee$, derart daß für alle $E^\vee \in \widetilde{T^\vee}$ der Schnitt $F \cap E$ aus zwei Kegelschnitten K_E und R_E besteht, von denen natürlich zumindest einer (o.B.d.A. K_E) zur Familie $\{K_s \mid s \in S\}$ gehört.*

Beweis. Nach Definition der Menge $T^\vee$ enthält jeder Schnitt $F \cap E$ für eine Ebene $E^\vee \in T^\vee$ einen Kegelschnitt $K_E \in \{K_s \mid s \in S\}$. Die 'Restkurve' $R_E := \overline{F \cap E \backslash K_E}$ ist für Ebenen aus einer nichtleeren offenen Teilmenge von $T^\vee$ auch tatsächlich eine solche, d.h. nichtleer, und wir können o.B.d.A. annehmen, daß $T^\vee$ bereits auf diese Untervarietät verkleinert worden ist. Denn im Fall $R_E = \emptyset$ berechnet man für $x \in K_E$: $\mu_x((F \cap E)^{div}) = \mu_x(2K_E) = 2$. Nach Lemma 2.5.5 gilt daher wegen $K_E \not\subset \operatorname{Sing} F$ notwendigerweise $K_E = \operatorname{Cont}_E F$. Weil F nach Satz 2.5.4 und 2.5.6 sicherlich keine Torse ist, kann dies nach Satz 1.6.4 nur für endlich viele Ebenen eintreten.
Wir nehmen nun an, daß R_E für alle Ebenen $E^\vee \in T^\vee$ reduzibel ist.
1. Fall: R_E ist für alle Ebenen aus $T^\vee$ eine Gerade g_E.
Der Divisor $(F \cap E)^{div}$ ist von 4. Grad. Daher gilt $(F \cap E)^{div} = K_E + 2g_E$, woraus $\mu_x((F \cap E)^{div}) \geq 2$ für alle $x \in g_E$ resultiert. Wegen $g_E \not\subseteq \operatorname{Sing} F$ heißt das aber nach Lemma 2.5.5 $g_E = \operatorname{Cont}_E F$ und dies kann, da F keine Torse ist, nur für endlich viele Ebenen eintreten (Satz 1.6.4). Also ist der erste Fall nicht möglich.
2. Fall: Es gibt eine nichtleere offene Menge $\widetilde{T^\vee} \subseteq T^\vee$ so, daß R_E aus zwei verschiedenen Geraden g_E, h_E besteht.
Würde es nur endlich viele Geraden auf F geben, so auch nur endlich viele Ebenen, die zwei verschiedene Geraden von F enthalten. Demnach muß F eine Regelfläche sein, was abermals Satz 2.5.6 widerspricht. ■

Nun kann man o.B.d.A. annehmen, daß die Parametervarietät der algebraischen Familie $\{K_s \mid s \in S\}$ hinreichend verkleinert ist, so daß für die zugehörige Varietät $T^\vee$ die Restkurve R_E stets ein Kegelschnitt ist. Um den zentralen Satz dieses Paragraphen zu beweisen, benötigen wir einige Lemmata. Zunächst beschäftigen wir uns dabei mit dem Fall, daß es einen Punkt $x \in F$ gibt, der für alle $E^\vee \in T^\vee$ im Schnitt $K_E \cap R_E$ enthalten ist. Ein solcher Punkt ist wegen

$\mu_x((F \cap E)^{div}) = 2$ gemäß Lemma 2.5.5 singulär für F. Wählt man x als ersten Koordinatengrundpunkt A_0, also $x = (1,0,0,0)$, so erhält das irreduzible homogene Polynom f, dessen Nullstellenmenge F ist, die Gestalt:

$$f = x_0^2 u_2 + 2x_0 u_3 + u_4 \tag{3.1}$$

wobei $u_2, u_3, u_4 \in k[x_1, x_2, x_3]$, $u_2 \not\equiv 0$, homogen von den Graden 2, 3 bzw. 4 sind. Die Diskriminante der Gleichung $\lambda^2 u_4 + 2\lambda u_3 + u_2 = 0$ bezüglich λ ist $u := u_2 u_4 - u_3^2$. Den Kegel $UK_x F := V(u)$ nennt man den *Umrißkegel* von x an F (siehe [2, S.24]). Die Erzeugenden dieses Kegels sind genau diejenigen Geraden durch x, die F in höchstens einem weiteren Punkt schneiden (und zwar mit 2–facher Vielfachheit), oder ganz auf F liegen. In den folgenden Sätzen und Lemmata bezeichnen u_i, v_i, w_i stets homogene Formen der Grade i und f sei das (bis auf einen skalaren Faktor eindeutig bestimmte) irreduzible homogene Polynom, dessen Nullstellenmenge F ist.

Lemma 3.1.2. *Der Punkt $x \in F$ sei für alle $E^\vee \in T^\vee$ im Schnitt $K_E \cap R_E$ enthalten und es sei stets $T_x K_E = T_x R_E =: g_E$. Ferner sei $TC_x F$ irreduzibel. Dann kann man Koordinaten so wählen, daß $x = (1,0,0,0)$,*

$$f = (x_0 + u_1)^2 u_2 + u_4 \text{ mit } u_1, u_2, u_4 \in k[x_1, x_2, x_3],$$

$TC_x F = V(u_2)$ und $UK_x F = TC_x F \cup V(u_4)$ gilt.

Beweis. $TC_x F = V(u_2)$ ist ein irreduzibler quadratischer Kegel. Zunächst ist $E \cap TC_x F = g_E$, also $(E \cap TC_x F)^{div} = 2g_E$ für alle $E^\vee \in T^\vee$. Denn g_E ist jweils die einzige Gerade in der Ebene E, für deren Schnitt mit F der Punkt x mindestens dreifache Nullstelle ist, und hierdurch sind die Erzeugenden von $TC_x F$ gerade gekennzeichnet. Da nun $E^\vee \in (TC_x F)^\vee$ für alle Ebenen aus $T^\vee$ folgt, erhält man $\overline{T^\vee} = (TC_x F)^\vee$. Nun ist x aber für den Schnitt $g_E \cap F$ sogar vierfache Nullstelle und da die g_E nun alle bis auf höchstens endlich viele Erzeugenden von $T_x F$ durchlaufen, folgert man, daß die Form u_2 aus Gleichung (3.1) u_3 teilen muß. Dazu betrachtet man g_E durch die Parameterdarstellung $z = (1,0,0,0) + \varrho(0, y_1, y_2, y_3)$ $(\varrho \in k)$ gegeben und beachte, daß in $f(z)$ die Koeffizienten sowohl von ϱ^2 als auch von ϱ^3, also $u_2(y_1, y_2, y_3)$ und $u_3(y_1, y_2, y_3)$ verschwinden müssen. Daher gilt nicht nur $g_E \subset V(u_2)$ sondern auch $g_E \subset V(u_3)$ und es folgt $TC_x F = \overline{T^\vee}^\vee \subseteq V(u_3)$. Hieraus ergibt sich für f die Form: $f = x_0^2 u_2 + 2x_0 u_1 u_2 + v_4$ mit $u_1, u_2, v_4 \in k[x_1, x_2, x_3]$. Setzt man $u_4 := v_4 - u_2 u_1^2$, so gilt $UK_x F = V(u_2 u_4)$, und es folgt die Behauptung. ■

Lemma 3.1.3. *Der Punkt $x \in F$ sei für alle $E^\vee \in T^\vee$ im Schnitt $K_E \cap R_E$ enthalten und es sei stets $T_x K_E = T_x R_E =: g_E$. Ferner sei $TC_x F$ reduzibel und es gebe $E_1{}^\vee, E_2{}^\vee \in T^\vee$ mit $g_{E_1} \neq g_{E_2}$. Dann kann man Koordinaten so wählen, daß $x = (1,0,0,0)$,*

$$f = (x_0 x_3 + u_2)^2 + u_4 \text{ mit } u_2, u_4 \in k[x_1, x_2, x_3],$$

$TC_x F = V(x_3)$ und $UK_x F = TC_x F \cup V(u_4)$ gilt.

BEWEIS. TC_xF zerfällt in ein oder zwei Ebenen. Wie im Beweis von Lemma 3.1.2 sieht man $E \cap TC_xF = g_E$ für alle $E^\vee \in T^\vee$. Da nun $g_{E_1} \neq g_{E_2}$ ist, muß der Tangentenkegel TC_xF mit der Verbindungsebene der beiden Geraden g_{E_1} und g_{E_2} übereinstimmen. Die Grundpunkte des Koordinatensystems seien $A_0, \ldots, A_3$. Es ist bereits $x = A_0$ gewählt. Die Punkte A_1, A_2 können jedoch noch in die Ebene TC_xF gelegt werden, so daß $TC_xF = V(x_3)$ gilt. Wie im Beweis des obigen Lemmas sieht man, daß die Form u_3 aus (3.1) von x_3 geteilt werden muß, und man erhält für f bei geeigneter Normierung des Koordinatensystems: $f = x_0^2 x_3^2 + 2x_0x_3u_2 + v_4$ mit $u_2, v_4 \in k[x_1, x_2, x_3]$. Setzt man $u_4 := v_4 - u_2^2$, so folgt die Behauptung. ■

Lemma 3.1.4. *Der Punkt $x \in F$ sei für alle $E^\vee \in T^\vee$ der einzige gemeinsame Punkt von K_E und R_E und es sei $T_xK_E = T_xR_E =: g$ eine von E unabhängige feste Gerade. Dann kann man Koordinaten so wählen, daß $x = (1, 0, 0, 0)$,*

$$f = (x_3^2 + 2x_0x_1 + u_2)^2 + u_4 \textit{ mit } u_2, u_4 \in k[x_1, x_2],$$

$TC_xF = V(x_1)$, $g = V(\{x_1, x_2\})$ und $UK_xF = TC_xF \cup V(u_4)$ gilt.

BEWEIS. Wie im Beweis der beiden vorigen Lemmata gilt $TC_xF \cap E = g$ für jede Ebene $E^\vee \in T^\vee \subseteq g^\vee$. Daran erkennt man, daß TC_xF in Ebenen durch g zerfällt. Nun gilt aber auch $UK_xF \cap E = g$ für alle Ebenen aus $T^\vee$. Denn gäbe es eine Gerade $h \subseteq UK_xF \cap E$, $h \neq g$, so würde diese $K_E \cup R_E$ in genau zwei Punkten schneiden (siehe Charakterisierung des Umrißkegels) und man hätte einen Widerspruch zur Voraussetzung $K_E \cap R_E = \{x\}$. Also zerfällt auch UK_xF in Ebenen durch g. Wählt man den Koordinatengrundpunkt $A_3 \in g \backslash A_0$, so gilt $g = V(\{x_1, x_2\})$ und man hat zunächst:

$$f = x_0^2 v_2 + 2x_0 v_3 + v_4 \text{ mit } v_2 \in k[x_1, x_2] \text{ und } v_3, v_4 \in k[x_1, x_2, x_3]$$

Wegen $A_3 \in g \subset V(v_3)$ läßt sich v_3 schreiben als $v_3 = x_3^2 u_1 + x_3 u_2 + u_3$ mit $u_1, u_2, u_3 \in k[x_1, x_2]$. Die Form v_4 besitzt eine Darstellung $v_4 = \lambda x_3^4 + x_3^3 w_1 + x_3^2 w_2 + x_3 w_3 + w_4$ mit $w_i \in k[x_1, x_2]$ für $i = 1, 2, 3, 4$, $\lambda \in k$. Wäre $\lambda = 0$, so würde $A_3 \in F$ im Widerspruch zu $g \cap F = \{x\}$ und $A_3 \in g \backslash \{x\}$ folgen. Man kann daher o.B.d.A. $\lambda = 1$ annehmen. Da der Umrißkegel in Ebenen durch g zerfällt, muß die Form $v_2 v_4 - v_3^2$ aus $k[x_1, x_2]$ sein. Daraus folgt nun durch Koeffizientenvergleich bezüglich x_3 : $v_2 = u_1^2$, $v_2 w_1 = 2u_1 u_2$, $v_2 w_2 = u_2^2 + 2u_1 u_3$ und $v_2 w_3 = 2u_2 u_3$. Wegen $v_2 \not\equiv 0$ gilt $u_1 \not\equiv 0$ und man erhält: $2u_2 = u_1 w_1$ und $2u_3 = u_1(w_2 - \frac{1}{4}w_1^2)$, also $v_3 = u_1(x_3^2 + \frac{1}{2}x_3 w_1 + \frac{1}{2}(w_2 - \frac{1}{4}w_1^2))$. Nach der Koordinatentransformation $x_3' := x_3 + \frac{1}{4}w_1$ erreicht man $v_3 = u_1(x_3'^2 + t_2)$ mit $t_2 := \frac{1}{2}w_2 - \frac{3}{16}w_1^2 \in k[x_1, x_2]$. Bei der Koordinatentransformation bleiben A_0 und A_3 fest. Legt man nun den Koordinatengrundpunkt A_2 in den Schnitt $TC_xF \cap V(x_3')$ (und läßt die Striche in der Bezeichnung wieder weg), so erhält man $u_1 = x_1$ also $f = x_0^2 x_1^2 + 2x_0 x_1(x_3^2 + t_2) + v_4 = (x_0 x_1 + x_3^2 + t_2)^2 + u_4$, wobei

$u_4 := v_4 - (x_3^2 + t_2)^2 \in k[x_1, x_2]$, da $u_1^2 u_4 = v_2 v_4 - v_3^2 \in k[x_1, x_2]$ gilt. Durch geeignete Umnormierung des Koordinatensystems folgt die Behauptung. ■

Lemma 3.1.5. *Der Punkt $x \in F$ sei für alle $E^\vee \in T^\vee$ einer von höchstens zwei Punkten aus $K_E \cap R_E$ und es sei stets $T_x K_E = T_x R_E =: g_E$. Ferner sei der Abschluß $\overline{T^\vee}$ der Varietät der Trägerebenen keine Gerade in $\mathbb{P}^{3^\vee}$. Dann gilt mit den Bezeichnungen $K := \overline{UK_x F \setminus TC_x F}$ und $T := \overline{T^\vee}^\vee$ für den Kegel K:*

(a) $\deg K = 1$ *falls* $T \not\subseteq K$,

(b) $\deg K \leq 2$ *falls* $T \subseteq K$.

Beweis. Nimmt man das Gegenteil der Behauptung an ($\deg K > 1$ falls $T \not\subseteq K$ und $\deg K > 2$ falls $T \subseteq K$), so gibt es zunächst eine nichtleere offene Teilmenge $\widetilde{T^\vee} \subseteq T^\vee$, so daß zu jeder Ebene E aus $\widetilde{T^\vee}$ die zugehörige Gerade g_E keine Erzeugende von K ist (beachte $g_E \subset TC_x F \not\subseteq K$) und $E \cap K$ mehr als eine Erzeugende von K erhält. Denn würden alle $E^\vee \in T^\vee$ den Kegel K in nur einer Erzeugenden schneiden, so würde im Fall, daß K irreduzibel ist, E längs dieser berühren, woraus $\overline{T^\vee} = K^\vee$, also $T = K$ folgt, und man kann sich auf den Fall (b) beschränken. Für eine Ebene $G \not\ni x$ wäre dann $C := K \cap G$ eine irreduzible ebene Kurve mindestens dritten Grades, deren sämtliche Tangenten sie mindestens dreifach berühren. Betrachtet man die 'Hessekurve' H dieser Kurve (definiere diese analog zur Hessefläche einer Fläche in Paragraph 2.4), so sieht man an Gleichung (2.6) (nach Modifikation für den zweidimensionalen Fall), daß $C \subseteq H$ gilt. In Analogie zu Satz 2.4.1 wäre $C^\vee$ nulldimensional, folglich auch $K^\vee$. Damit würde $\dim T^\vee = 0$ im Widerspruch zu unserer Voraussetzung gelten.

Ist K reduzibel, so stimmen unter der Annahme, daß $E \cap K$ stets nur eine Gerade ist, wegen $\deg \overline{T^\vee} > 1$ alle irreduziblen Komponenten von K auf einer einparametrigen Familie von Geraden durch x überein, so daß sich ein Widerspruch zur Reduzibilität von K ergibt.

Also liegen in jeder Ebene $E^\vee \in \widetilde{T^\vee}$ mindestens zwei von g_E verschiedene, auf K gelegene Geraden durch x, die (weil sie Erzeugende des Umrißkegels sind) $K_E \cup R_E$ je in nur einem von x verschiedenen Punkt schneiden. Dies müssen aber Schnittpunkte von K_E und R_E sein, also $card(K_E \cap R_E) \geq 3$ im Widerspruch zur Voraussetzung. ■

Lemma 3.1.6. *Die Varietät $T^\vee$ der Trägerebenen sei in der dualen Varietät $F^\vee$ von F enthalten. Weiter sei $C' := \Theta^{-1}(T^\vee)$ (Bez. siehe (2.8)) und C die parabolische Kurve von F (siehe Paragraph 2.4). Dann gilt:* $\dim(C' \cap C) = 0$.

Beweis. Angenommen es, gäbe eine Kurve $C'' \subseteq C' \cap C$, die wir o.B.d.A. als irreduzibel betrachten können. Zu $x \in C''$ sei $E_x := T_x F$. Da x parabolisch ist, stimmen die Haupttangenten in x überein, d.h. $g_x := T_x K_{E_x} = T_x R_{E_x}$.

Nun sind K_{E_x} und R_{E_x} Kegelschnitte also $g_x \cap F = \{x\}$, woraus nach Satz 2.4.4 $g_x = T_x C''$ für alle $x \in C''$ folgt. Nach Satz 2.4.3 ist somit $E^\vee := \Theta(C'')$ eine einzige Ebene mit $C'' \subseteq \mathrm{Cont}_E F$. Nach unseren Voraussetzungen über $T^\vee$ (siehe Anschluß an Satz 3.1.1) gilt nun aber $E^\vee \notin T^\vee$ im Widerspruch zu $C'' \subset C'$. ∎

Satz 3.1.7. *Die Quartik F besitze höchstens isolierte Singularitäten (d.h. $\mathrm{Sing}\, F = \emptyset$ oder $\dim \mathrm{Sing}\, F = 0$) und eine einparametrige algebraische Familie von Kegelschitten $\{K_s \mid s \in S\}$. Dann läßt sich die Gleichung von F auf eine der beiden folgenden Formen transformieren:*

$$f = (2x_0x_3 + u_2)^2 + x_1x_2(x_1 + x_2)(x_1 + ax_2) = 0 \tag{3.2}$$

mit $a \neq 1, 0$ und $u_2 \in k[x_1, x_2]$ oder

$$f = (x_3^2 + 2x_0x_1 + u_2)^2 + x_2(x_1 + x_2)(x_1 + ax_2)(x_1 + bx_2) = 0 \tag{3.3}$$

mit $a \neq 1, b \neq 1$ und $a \neq b$ sowie $u_2 \in k[x_1, x_2]$. Alle Ebenen von $T^\vee$ gehen durch die Gerade $g := V(\{x_1, x_2\})$. Im Fall von (3.2) besitzt F zwei singuläre Punkte auf g ($(1,0,0,0)$ und $(0,0,0,1)$), in welchen sich die beiden Kegelschnitte K_E und R_E (gemäß Satz 3.1.1) für alle Ebenen aus $T^\vee$ berühren, und eventuell zwei weitere Singularitäten. Im Fall von (3.3) gibt es genau eine Singularität $x = (1,0,0,0)$ auf F. In dieser berühren sich die Kegelschnitte K_E und R_E für sämtliche Ebenen E. Weiterhin ist x der einzige Punkt im Schnitt $K_E \cap R_E$ und die Tangente $T_xK_E = T_xR_E$ ist die von E unabhängige Gerade $g = V(\{x_1, x_2\})$.

Beweis. Behauptung 1: Es gibt eine nichtleere offene Teilmenge $\widetilde{T^\vee} \subseteq T^\vee$ mit der Eigenschaft, daß für alle $E^\vee \in \widetilde{T^\vee}$ $card(K_E \cap R_E) \leq 2$ gilt.
Der Beweis der Behauptung 1 verwendet des öfteren

$$K_E \cap R_E \subseteq (E \cap \mathrm{Sing}\, F) \cup \mathrm{Cont}_E F, \tag{$*$}$$

was nach Lemma 2.5.5 gilt. Sei $\mathrm{Sing}\, F = \{z_1, \ldots, z_r\}$. Von den Schnittpunkten zweier Kegelschnitte sind keine drei kollinear. Somit können höchstens zwei der Punkte (o.B.d.A. seien dies z_1, z_2) Schnittpunkte von K_E und R_E für alle Ebenen von $T^\vee$ sein.
1. Fall: $T^\vee \subseteq {z_1}^\vee \cap {z_2}^\vee$.
Sei g die Verbindungsgerade von z_1 und z_2. Es gilt $T^\vee \subseteq g^\vee$. Es gibt nun eine nichtleere offene Menge $\widetilde{T^\vee} \subseteq T^\vee$, so daß $E \cap \mathrm{Sing}\, F = \{z_1, z_2\}$ und $\mathrm{Cont}_E F \subset g = \overline{T^\vee}^\vee$ (Korollar 2.6.2) für alle Ebenen $E^\vee \in \widetilde{T^\vee}$ gilt. Aus $g \cap F = \{z_1, z_2\}$ und $(*)$ folgt Behauptung 1.
2. Fall: $T^\vee \subset {z_1}^\vee$ und $T^\vee \not\subseteq {z_2}^\vee$.
Sei $T := \overline{T^\vee}^\vee$. Es gibt nun eine nichtleere offene Teilmenge $\widetilde{T^\vee} \subseteq T^\vee$ mit der Eigenschaft, daß für alle Ebenen $E^\vee \in \widetilde{T^\vee}$ die Beziehungen $E \cap \mathrm{Sing}\, F = \{z_1\}$

und $\mathrm{Cont}_E F \subset \mathrm{Cont}_E T$ (Korollar 2.6.2) gelten. Da T ein Kegel mit Spitze z_1 oder eine Gerade ist, muß $\mathrm{Cont}_E T$ eine Gerade durch z_1 sein. Damit enthält $\mathrm{Cont}_E F$ höchstens einen von z_1 verschiedenen Punkt, da die Schnittgleichung einer Gerade durch z_1 mit F nur zwei von z_1 verschiedene Lösungen besitzt, die hier zusammenfallen müssen. Zusammen mit $(*)$ folgt wieder Behauptung 1.
3. Fall: $T^\vee \not\subset {z_1}^\vee$ und $T^\vee \not\subset {z_2}^\vee$
Über $T := \overline{T^\vee}^\vee$ weiß man in diesem Fall lediglich, daß es sich um eine Torse oder eine Gerade handelt. Auf jeden Fall gibt es wieder eine nichtleere offene Menge $\widetilde{T^\vee} \subseteq T^\vee$, deren Ebenen E keine Singularität von F enthalten. Schnittpunkte von K_E und R_E kann es daher nur im Berührort $\mathrm{Cont}_E F$ geben, und da eine nicht auf F gelegene Gerade höchsten in zwei Punkten berühren kann ($\deg F = 4$), erkennt man mit Hilfe der Bemerkung im Anschluß an Korollar 2.6.2 die Gültigkeit von Behauptung 1, die damit gezeigt ist.

Wir nehmen o.B.d.A $\widetilde{T^\vee} = T^\vee$ an. Den Sätzen 2.1.4 und 2.1.5 zufolge gibt es nun zu jeder Ebene $E^\vee \in T^\vee$ ein $x_E \in K_E \cap R_E$ mit $T_{x_E} K_E = T_{x_E} R_E$, da bei nur zwei Schnittpunkten mindesten einer doppelt zählen muß. Nach Lemma 3.1.6 kann man (eventuell nach abermaliger Verkleinerung von $T^\vee$) $x_E \in \mathrm{Sing}\, F$ annehmen, da andernfalls $T_{x_E} F = E$ und $T_{x_E} K_E$ sowie $T_{x_E} R_E$ Haupttangenten in x_E wären, also x_E parabolisch. Damit ist $card(x^\vee \cap T^\vee) = \infty$ für ein $x \in \mathrm{Sing}\, F$ und da $T^\vee$ irreduzibel ist, gilt $T^\vee \subset x^\vee$. Also gibt es ein $x \in \mathrm{Sing}\, F$ mit $x \in K_E \cap R_E$ und $g_E := T_x K_E = T_x R_E$ für alle $E^\vee \in T^\vee$. Daher können die Lemmata 3.1.2 bis 3.1.5 angewandt werden.

Behauptung 2: $TC_x F$ ist reduzibel und $\deg \overline{T^\vee} = 1$.
Zum Beweis der Reduzibilität nehmen wir das Gegenteil an und verwenden die Gleichung nach Lemma 3.1.2. Dort gilt für den Kegel K aus Lemma 3.1.5 $K = V(u_4)$, weil $TC_x F = V(u_2) \subseteq V(u_4)$ die Reduzibilität des Polynoms f zur Folge hätte. Im Beweis von Lemma 3.1.2 wurde bereits $T := \overline{T^\vee}^\vee = TC_x F$ gezeigt. Daher ist insbesondere $\deg \overline{T^\vee} > 1$ und nach Lemma 3.1.5 K eine Ebene. Folglich gibt es eine homogene lineare Form $v_1 \in k[x_1, x_2, x_3]$ mit $u_4 = v_1^4$. Betrachtet man die Ableitungen von f, so erkennt man nun, daß $\mathrm{Sing}\, F$ die Gerade $V(\{x_0 + u_1, v_1\})$ enthält, im Widerspruch zu $\dim \mathrm{Sing}\, F < 1$.
Wir nehmen nun an, daß $T^\vee$ nicht offene Teilmenge einer Gerade des ${\mathbb{P}^3}^\vee$ ist. Die Gerade g_E ist dann sicherlich nicht konstant (unabhängig von E) und man kann die Gleichung nach Lemma 3.1.3 verwenden. Hierin wird das Polynom u_4 nicht von x_3^2 geteilt, da sonst die Kurve $V(\{x_3, x_0 x_3 + u_2\})$ in $\mathrm{Sing}\, F$ enthalten wäre. Falls u_4 nicht einmal von x_3 geteilt wird, gilt $K = V(u_4)$ und Lemma 3.1.5 liefert $\deg K \leq 2$, also $u_4 = v_2^2$ mit einem geeigneten homogenen Polynom v_2 zweiten Grades. Dann wird aber f reduzibel und es bleibt nur noch der Fall $u_4 = x_3 v_3$ zu betrachten, wobei $K = V(v_3)$ gilt. Wiederum hat man laut Lemma 3.1.5 $\deg K \leq 2$, also $v_3 = v_1^2 w_1$. Das führt auf die in $\mathrm{Sing}\, F$ enthaltene Kurve $V(\{v_1, x_0 x_3 + u_2\})$. Damit ist Behauptung 2 gezeigt.

Sei nun $g := \overline{T^\vee}^\vee$. Wählt man die Koordinatengrundpunkte $A_0 := x$ und $A_3 \in g \backslash \{A_0\}$, so gilt $g = V(\{x_1, x_2\})$. Nun zerfällt K in Ebenen durch g. Im Fall, daß $g_E = g$ für alle Ebenen aus $T^\vee$ gilt, ist dies bereits durch Lemma 3.1.4 klar (beachte, daß die Voraussetzung $K_E \cap R_E = \{x\}$ des Lemmas hier wegen $\mathrm{Cont}_E F \subset g$ (Korollar 2.6.2) und $(*)$ automatisch erfüllt ist). Im anderen Fall gäbe es sonst eine nichtleere offene Menge $\widetilde{T^\vee} \subseteq T^\vee$ derart, daß jede Ebene E aus $\widetilde{T^\vee}$ den Kegel K in einer von g und g_E verschiedenen (beachte $g_E \subset TC_x F \not\subseteq K$) Geraden h_E schneidet, welche wegen $\dim \mathrm{Sing}\, F = 0$ und $K \subseteq UK_x F$ die Quartik F außerhalb von g berühren muß. Dies widerspricht aber $\mathrm{Cont}_E F \subset g$, was nach Korollar 2.6.2 gilt. Demnach gilt $K = V(v)$ mit einem $v \in k[x_1, x_2]$.

Betrachte zunächst den Fall gemäß Lemma 3.1.3: Nun gilt $UK_x F = TC_x F \cup K = V(x_3^r v) = TC_x F \cup V(u_4) = V(x_3 u_4)$ also $u_4 = x_3^s v$ mit $v \in k[x_1, x_2]$. Wie oben sieht man, daß x_3^2 die Form u_4 nicht teilt und es bleiben die Möglichkeiten $u_4 = x_3 v_3$ mit $v_3 \in k[x_1, x_2]$ oder $u_4 \in k[x_1, x_2]$ übrig. Die Gleichung von F (Lemma 3.1.3) lehrt nun, daß auf g ein weiterer von x verschiedener singulärer Punkt von F liegt, den man daher als neuen Koordinatengrundpunkt A_3 wählen kann. Dann ist zunächst $u_2 = x_3 u_1 + v_2$ mit $u_1, v_2 \in k[x_1, x_2]$, woraus man $TC_{A_3} F = V(x_0 + u_1)$ erkennt. Legt man die Koordinatengrundpunkte A_1, A_2 in die Gerade $h := TC_{A_0} F \cap TC_{A_3} F$, so ergibt sich $TC_{A_3} F = V(x_0)$ und man sieht $T_{A_0} K_E = T_{A_0} R_E = E \cap V(x_3)$, sowie $T_{A_3} K_E = T_{A_3} R_E = E \cap V(x_0)$. Betrachtet man nun speziell $A_1 = h \cap E$, dann gilt $E = V(x_2)$ und K_E sowie R_E besitzen neben $x_2 = 0$ Gleichungen der Art

$$\alpha_i x_1^2 + \beta_i x_0 x_3 = 0 \quad i = 1, 2. \tag{$**$}$$

Im Fall $u_4 = x_3 v_3$ kann man A_1 beliebig in der nichtleeren offenen Menge $h \backslash K$ wählen, also insbesondere so, daß $A_1 \in E$ mit $E^\vee \in T^\vee$ und $v_3 = \lambda x_1^3 + \ldots$ mit $\lambda \in k$, $\lambda \neq 0$ gilt ($\lambda = 0$ bedeuted $A_1 \in K$). Man erkennt dann, daß $E \cap F$ überhaupt kein derartiges Kegelschnittpaar besitzen kann, da zwar $f(x_0, x_1, 0, x_3)$, nicht aber ein Produkt von zwei Polynomen der Form $(**)$, den Term $x_3 x_1^3$ enthält. Damit ist $u_4 \in k[x_1, x_2]$ notwendig und durch die Umnormierung $x_0 = 2x_0'$ erhält f zunächst die Form: $f = (2x_0' x_3 + u_2)^2 + u_4$ mit $u_2, u_4 \in k[x_1, x_2]$. An dieser Gleichung erkennt man nun, daß alle Ebenen $E^\vee \in g^\vee$, die nicht durch die Schnittpunkte von h und F gehen, ein Paar von Kegelschnitten aus F ausschneiden. Diese berühren sich in den beiden Punkten A_0 und A_3. Denn falls $E = V(ax_1 - bx_2)$ und o.B.d.A. $b \neq 0$ ist, so erhält man für die Projektion von $F \cap E$ vom Punkt A_2 auf die Ebene $V(x_2)$ (neben $x_2 = 0$) die Gleichung (substituiere $x_2 = \frac{ax_1}{b}$ und multipliziere mit b^4):

$$(2b^2 x_0 x_3 + (u_2(b,a) + i\sqrt{u_4(b,a)})x_1^2)(2b^2 x_0 x_3 + (u_2(b,a) - i\sqrt{u_4(b,a)})x_1^2) = 0,$$

wobei i die Wurzel aus -1 in k bezeichnet.
Zerfällt K in die vier Ebenen $E_0, \ldots, E_3$ mit $E_i^\vee \in g^\vee$, $i = 0, \ldots, 3$, so schneidet jede von den E_i verschiedene Ebene E durch g die Quartik offenbar sogar

in zwei verschiedenen Divisoren 2. Grades, von denen im Fall $E \cap F \cap h \neq \emptyset$ immerhin einer, im Fall $E \cap F \cap h = \emptyset$, welcher für alle bis auf höchstens vier Ebenen eintritt, sogar beide Kegelschnitte sind. Daher kann eine Kurve singulärer Punkte von F höchstens in einer der Ebenen E_i liegen. Da F eine solche nicht besitzen soll, ist $card\{E_0{}^{\vee}, \ldots, E_3{}^{\vee}\} = 4$ notwendig. Legt man nun die Koordinatengrundpunkte A_1, A_2 in $h \cap E_1$ und $h \cap E_2$, so erhält man bei geeigneter Normierung des Koordinatensystems Gleichung (3.2). Eine Betrachtung der Ableitungen von f liefert nun $E_i \cap \operatorname{Sing} F = \{A_0, A_3\}$ für $i = 0, \ldots, 3$. Daher kann es von A_0, A_3 verschiedene singuläre Punkte höchstens auf h geben, da dies auch für die Schnittkurven mit Ebenen $E \not\subset K$ durch g gilt, und dies können nicht mehr als zwei sein ($h \not\subset F$).

Wir wenden uns nun dem Fall zu, in dem alle Geraden g_E mit g übereinstimmen. Nun kann die Gleichung gemäß Lemma 3.1.4 verwendet werden. Ganz analog zu obiger Überlegung sieht man, daß alle Ebenen $E^{\vee} \in g^{\vee}$ die Quartik F in zwei Kegelschnitten schneiden, die entweder identisch sind oder deren einziger gemeinsamer Punkt der Berührpunkt x ist (und in dem sich die beiden Kegelschnitte 4–fach berühren). Ersteres tritt genau für die Ebenen $E_0, \ldots, E_3$ auf, welche wieder die irreduziblen Komponenten des Kegels $K = V(u_4)$ sind. Auch hier erkennt man, daß für die Gültigkeit von $\dim \operatorname{Sing} F = 0$ $card\{E_0, \ldots, E_3\} = 4$ sowohl notwendig als auch hinreichend ist. Daher kann man unter Berücksichtigung des Umstandes, daß der Koordinatenpunkt A_2 nicht mehr frei gewählt werden kann (siehe Lemma 3.1.4), f auf die Gestalt (3.3) transformieren. Ähnlich wie bei obiger Überlegung sieht man, daß x die einzige Singularität von F ist, weil dies auch für alle ebenen Schnitte durch g gilt. Damit ist Satz 3.1.7 bewiesen. ■

Für die beiden nach diesem Satz existierenden Quartiken mit isolierten Singularitäten und einer einparametrigen Familie von Kegelschnitten wollen wir die Typenbezeichnungen (j1) und (j2) einführen entsprechend den beiden Gleichungen (3.2) und (3.3). Sie werden als Quartiken mit *Selbstberührungspunkten* bezeichnet. An dieser Stelle sei bemerkt, daß die Flächen (j1) bereits von Meyer ([15, S.1572 u. 1672]) als Quartiken mit einer Familie von Kegelschnitten erkannt wurden. Der Typ (j2) wird hier jedoch übersehen. Von Jessop ([12, S.134]) wird diese Lücke geschlossen. Jedoch wird auch hier nicht der Beweis erbracht, daß damit alle Quartiken mit höchstens isolierten Singularitäten und einparametriger algebraischer Familie von Kegelschnitten gefunden sind.

Satz 3.1.8. *Für eine Quartik F der Typen (j1) und (j2) ist $C_{1,2}(F)^{irr}$ irreduzibel und eindimensional.*

Beweis. Nach Satz 2.3.3 bilden die Kegelschnitte auf F, die in Ebenen des Büschels $g^{\vee}$ liegen eine einparametrige irreduzible algebraische Familie von Kegelschnitten. Es ist daher nur zu zeigen, daß jeder Kegelschnitt auf F unter diesen vorkommt. Dies ist recht einfach: Mit $E_0, \ldots, E_3$ bezeichnen wir wieder die vier verschiedenen Ebenen mit $E_0 \cup \ldots \cup E_3 = K = V(u_4)$, die den vier linearen Faktoren des rechten Summanden in der Gleichung von F entsprechen. An den Gleichungen (3.2) bzw. (3.3) erkennt man, daß diese die Fläche F längs der Schnittkurven berühren. Aus dem letzten Beweis wissen wir bereits: $E_i \cap \operatorname{Sing} F = \{A_0, A_3\}$ im Fall des Typs (j1) und $E_i \cap \operatorname{Sing} F = \{A_0\}$ im Fall von (j2). Sei nun C ein Kegelschnitt auf F mit Trägerebene $E \not\supset g$. Keine der vier verschiedenen Geraden $g_i := E_i \cap E$ enthält einen von A_0, A_3 verschiedenen singulären Punkt von F, aber jede geht durch den Punkt $E \cap g$. Für jeden von A_0, A_3 verschiedenen Schnittpunkt $y_i \in g_i \cap C$ gilt daher $T_{y_i}C \subset T_{y_i}F = E_i$, also $T_{y_i}C = g_i$. Da die duale Varietät eines Kegelschnitts (aufgefaßt als ebene Kurve) wieder ein solcher ist, kann C aber keine vier kopunktalen Tangenten besitzen und man muß die Annahme $g \not\subset E$ verwerfen. ■

3.2 Einteilung der Quartiken mit eindimensionalem singulären Ort

In diesem Paragraphen wird eine Einteilung der Quartiken F mit $\dim \operatorname{Sing} F = 1$ anhand der Gestalt der Kurve singulärer Punkte, die wir hier mit S bezeichnen (S ist der rein eindimensionale Anteil von $\operatorname{Sing} F$), vorgenommen. Diese Einteilung ist Grundlage für die nachfolgende Behandlung dieser Quartiken. Wir benötigen folgenden fundamentalen Satz aus der Theorie der ebenen algebraischen Kurven, der hier nur zitiert wird.

Satz 3.2.1. *Sei C_d eine irreduzible Kurve d-ten Grades im $\mathbb{P}^3$. Dann besitzt C_d höchstens $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$ singuläre Punkte.*

BEWEIS. [1, S.136] oder [24, S.102] ■

Satz 3.2.2. *Eine von einem Kegel verschiedene Quartik F mit der Kurve S singulärer Punkte gehört zu genau einem der folgenden Typen:*

(a) *S ist eine irreduzible kubische (nicht ebene) Raumkurve und* $\operatorname{Sing}_3 F = \emptyset$.

(b) *S ist ein Kegelschnitt und* $\operatorname{Sing}_3 F = \emptyset$

(c) *S besteht aus einem Kegelschnitt und einer Geraden, die die Trägerebene des Kegelschnitts in einem Punkt desselben schneidet. Weiterhin gilt* $\operatorname{Sing}_3 F = \emptyset$.

(d) *S besteht aus drei verschiedenen Geraden, von denen zwei zueinander windschief sind und von der dritten geschnitten werden. Auch hier gilt* $\operatorname{Sing}_3 F = \emptyset$.

(e) *S besteht aus drei verschiedenen kopunktalen Geraden, die aber nicht in einer Ebene liegen. Der Schnittpunkt der drei Geraden ist der einzige dreifache Punkt der Fläche.*

(f) *S besteht aus zwei verschiedenen sich schneidenden Geraden. Falls F einen dreifachen Punkt besitzt, so ist dies der Schnittpunkt der Geraden.*

(g) *S besteht aus zwei windschiefen Geraden und $\mathrm{Sing}_3 F = \emptyset$.*

(h) *S ist genau eine Gerade und es gibt höchstens endlich viele dreifache Punkte von F, die notwendigerweise auf derselben liegen.*

(i) $S = \mathrm{Sing}\, F = \mathrm{Sing}_3 F$ *ist eine in Gerade.*

Beweis. Es wird des öfteren verwendet, daß eine Gerade, die drei zweifache Punkte oder einen zweifachen und einen dreifachen Punkt von F enthält, ganz auf F liegen muß (Abzählung der Schnittmultiplizitäten!).
Zunächst ist es notwendig, daß in den Fällen (a) bis (d) und (g) $\mathrm{Sing}_3 F = \emptyset$ und in den Fällen (e) und (f) $\mathrm{Sing}_3 F$ im Schnitt der Geraden liegt, da andernfalls ein $x \in \mathrm{Sing}_3 F$ existiert, so daß alle Verbindungsgeraden von x mit weiteren Punkten $y \in \mathrm{Sing}\, F$ in F enthalten sind. Dann wäre entgegen der Voraussetzung F ein Kegel mit Spitze x.
Behauptung: $\deg S \leq 3$.
Ist $\deg S \geq 4$, dann gibt es nach Satz 2.1.3 eine nichtleere offene Menge $U^\vee \subseteq \mathbb{P}^{3\vee}$ von Ebenen, die S in mehr als drei Punkten schneiden. Nach Korollar 2.3.5 kann man $U^\vee$ zu einer nichtleeren offenen Teilmenge $V^\vee$ verkleinern, so daß für alle $E^\vee \in V^\vee$ der Schnitt $E \cap F$ irreduzibel ist. Wegen $E \cap S \subseteq \mathrm{Sing}\,(E \cap F)$ (Lemma 2.5.5) erhält man einen Widerspruch zu Satz 3.2.1.
Sehr einfach sieht man, daß im Fall $\mathrm{Sing}_4 F \neq \emptyset$ die Fläche F ein Kegel ist, was aber hier ausgeschlossen sein sollte. Für eine ebene Kurve $C \subseteq \mathrm{Sing}\, F$ gilt $\deg C \leq 2$, denn andernfalls wäre die Trägerebene der Kurve in F enthalten (jede Gerade, die C in mehr als zwei Punkten schneidet liegt auf F). Falls S in eine ebene Kurve zweiter Ordnung und eine Gerade g zerfällt, so ist letztere sicher nicht in der Trägerebene der ersteren enthalten, sondern schneidet diese in einem Punkt der Kurve, da der andere Fall wieder dazu führt, daß die Trägerebene in F enthalten ist. Nun kann S auch nicht in drei windschiefe Geraden zerfallen, da sonst die Quadrik der Treffgeraden derselben in F enthalten wäre. Faßt man diese Aussagen zusammen, so folgt, daß F zu einem der Typen des Satzes gehören muß. ■

3.3 Quartiken mit irreduzibler kubischer Doppelpunktskurve

Wir untersuchen nun, welche der Quartiken des Typs (a) (nach vorigem Paragraphen) einparametrige algebraische Familien von Kegelschnitten besitzen. Es wird also der Fall betrachtet, daß die Doppelpunktskurve S eine irreduzible kubische Raumkurve $\bar{C}_3$ ist. Der Kegel Z_x von einem Punkt $x \in \bar{C}_3$ an $\bar{C}_3$ ist von zweiter Ordnung, da jede Ebene durch x ihn in höchstens zwei Erzeugenden schneidet (Satz 2.1.3). Damit ist für $x \neq y \in \bar{C}_3$ $Z_x \cap Z_y = g \cup \bar{C}_3$, wobei g die Verbindungsgerade von x und y ist. Denn es ist sicherlich $Z_x \cap Z_y \supseteq g \cup \bar{C}_3$ und $\deg(Z_x \cap Z_y) = 4$ (siehe Bemerkung 2.1.6). Weiterhin gilt $T_x Z_y \neq T_y Z_x$, denn anderfalls würden sich Z_x und Z_y längs g berühren und man sieht, daß $Z_x \cap Z_y$ dann neben g nur einen Kegelschnitt enthalten kann (Bemerkung 2.1.6). Daher gilt $(T_x Z_y) \cap Z_x = g \cup g_1$ und $(T_y Z_x) \cap Z_y = g \cup g_2$ mit $x \in g_1$, $y \in g_2$ und $g_1 \cap g_2 = \emptyset$. Sei T_1 die Ebene, die Z_x längs g_1 berührt, und T_2 diejenige, die Z_y längs g_2 berührt. Die Grundpunkte des Koordinatensystems bezeichnen wir wieder mit $A_0, \ldots, A_3$. Wir wählen $A_0 := x$, $A_3 := y$, $A_1 := g_1 \cap T_2$ und $A_2 := g_2 \cap T_1$. Wegen $g_1 \cap g_2 = \emptyset$ gilt $A_1 \notin Z_y$ und $A_2 \notin Z_x$ (beachte $T_1 \cap Z_x = g_1$ und $T_2 \cap Z_y = g_2$). Außerdem gilt $A_1 \in T_{A_0} Z_y \cap T_{A_2} Z_y$ und $A_2 \in T_{A_3} Z_x \cap T_{A_1} Z_x$. Normiert man die Koordinatengrundpunkte geeignet, so erhält man $Z_x = V(x_1 x_3 - x_2^2)$ und $Z_y = V(x_0 x_2 - x_1^2)$. In diesem Koordinatensystem erscheint $\bar{C}_3$ als reguläres Bild einer projektiven Geraden $\mathbb{P}^1$ vermittels der *Veroneseabbildung* $\nu : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^3$, die durch $\nu((\lambda, \mu)) := (\lambda^3, \lambda^2\mu, \lambda\mu^2, \mu^3) \in \bar{C}_3$ definiert ist. Fügt man zu den Kegeln Z_x, Z_y die Quadrik mit der Gleichung $f_2 := x_0 x_3 - x_1 x_2 = 0$ hinzu, so bilden $f_1 := x_0 x_2 - x_1^2$, f_2, $f_3 := x_1 x_3 - x_2^2$ eine Basis des homogenen Ideals $I(\bar{C}_3) = (f_1, f_2, f_3)$ (siehe [2, §16]).

Lemma 3.3.1. *Die Quartik $F = V(f)$ besitze die kubische Raumkurve $\bar{C}_3$ als eindimensionalen Anteil des singulären Ortes. Dann folgt $f \in I(\bar{C}_3)^2$.*

Beweis. Wegen $\bar{C}_3 \subset F$ ist zunächst $f \in I(\bar{C}_3)$, d.h. $f = g_1 f_1 + g_2 f_2 + g_3 f_3$ mit homogenen Formen $g_1, g_2, g_3 \in k[x_0, \ldots, x_3]$ (f_1, f_2, f_3 wie oben). Im homogenen Koordinatenring $S[\bar{C}_3] := k[x_o, \ldots, x_3]/I(\bar{C}_3)$ gilt wegen $\bar{C}_3 \subseteq \operatorname{Sing} F$ für die partiellen Ableitungen von f : $\frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv 0$ ($i = 0, \ldots 3$). Also sind g_1, g_2, g_3 als Elemente von $S[\bar{C}_3]$ (man identifiziere im folgenden die Polynome stets mit ihren Äquivalenzklassen in $S[\bar{C}_3]$) Lösungen der Matrixgleichung

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_2 & x_3 & 0 \\ -2x_1 & -x_2 & x_3 \\ x_0 & -x_1 & -2x_2 \\ 0 & x_0 & x_1 \end{pmatrix}}_{=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)=:M} \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \end{pmatrix} = 0. \qquad (*)$$

Falls die Äquivalenzklassen der g_i die triviale Lösung dieser Gleichung darstellen, folgt sofort $f \in I(\bar{C}_3)^2$. Im Quotientenkörper von $S[\bar{C}_3]$ (existiert, da $I(\bar{C}_3)$ auf Grund der Irreduzibilität von $\bar{C}_3$ ein Primideal ist) besitzt M den Rang 2 (nachrechnen!). Deshalb ist jede Lösung von $(*)$ in diesem proportional zur Fundamentallösung $(x_2x_4, -x_2x_3, x_1x_3)$. Das heißt aber, daß es stets $h \in k[x_0, \dots, x_3]$, $l \notin I(\bar{C}_3)$ und $q_1, q_2, q_3 \in I(\bar{C}_3)$ gibt, so daß $g_1 = \frac{h}{l}(x_1x_3 + q_1)$, $g_2 = \frac{h}{l}(-x_1x_2 + q_2)$, $g_3 = \frac{h}{l}(x_0x_2 + q_3)$ gilt. Nun berechnet man $f_1f_3 = f_1x_1x_3 - f_2x_1x_2 + f_3x_0x_2$, woraus $f = \frac{h}{l}q$ mit einem $q \in I(\bar{C}_3)^2$ bzw. $fl \in I(\bar{C}_3)^2$ folgt. Gemäß der Theorie der Zerlegung von Idealen in noetherschen Ringen ist $I(\bar{C}_3)$ das zu $I(\bar{C}_3)^2$ gehörige Primideal, und da $l \notin I(\bar{C}_3)$ gilt, folgt $f \in I(\bar{C}_3)^2$. Für die letzte Folgerung benötigt man den Satz aus [26, S.42]. ■

Nach diesem Lemma erhält man alle hier in Frage stehenden Quartiken, wenn das Koordinatensystem wie oben angepaßt ist, indem man in eine homogene quadratische Form q aus $k[x_1, x_2, x_3]$ die Polynome f_1, f_2, f_3 substituiert. Das so erhaltene Polynom $f := q(f_1, f_2, f_3)$ ist, wie man leicht sieht, genau dann irreduzibel, wenn dies für q gilt, denn eine Fläche vierter Ordnung mit $\bar{C}_3 \subset \operatorname{Sing} F$ kann höchstens in zwei Quadriken zerfallen, deren definierende homogene Polynome aus $I(\bar{C}_3)$ sind, weshalb es in diesem Fall $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in k$ mit $f = (a_1f_1 + a_2f_2 + a_3f_3)(b_1f_1 + b_2f_2 + b_3f_3)$ gibt.

Satz 3.3.2. *Es gilt:*

(a) *Falls die Quartik F eine Torse ist, besitzt F alle Tangenten von $\bar{C}_3$ als Erzeugende. Alle derartigen Flächen sind zueinander projektiv äquivalent.*

(b) *Falls F keine Torse ist, so gibt es eine nichtleere offene Teilmenge $\widetilde{C_3} \subseteq \bar{C}_3$, so daß für jeden Punkt $x \in \widetilde{C_3}$ zwei Sekanten von $\bar{C}_3$ durch x auf F liegen.*

Beweis. Zwei Punkte auf $\bar{C}_3$ sind mittels der Veroneseabbildung durch $x = (\lambda^3, \lambda^2\mu, \lambda\mu^2, \mu^3)$ und $y = (\xi^3, \xi^2\eta, \xi\eta^2, \eta^3)$ gegeben. Für den Punkt $z = x + \varrho y$ auf der Verbindungsgeraden von x und y berechnet man $(f_1(z), f_2(z), f_3(z)) = \varrho(\lambda\eta - \xi\mu)^2(\lambda\xi, \lambda\eta + \xi\mu, \mu\eta)$ und daraus $f(z) = \varrho^2(\lambda\eta - \xi\mu)^4 q(\lambda\xi, \lambda\eta + \xi\mu, \mu\eta)$. Das heißt aber, daß für $x \neq y$ die Verbindungsgerade der beiden Punkte genau dann auf F liegt, wenn

$$q(\lambda\xi, \lambda\eta + \xi\mu, \mu\eta) = 0 \qquad (*)$$

erfüllt ist. Setzt man nun $r_{xy} := (\lambda\xi, \lambda\eta + \xi\mu, \mu\eta) = \xi(\lambda, \mu, 0) + \eta(0, \lambda, \mu) \in \mathbb{P}^2$, so durchläuft r_{xy} für festes x die Tangente des Kegelschnittes $\alpha := V(4x_0x_2 - x_1^2)$ im Punkt r_{xx}. Ist β der Kegelschnitt $\beta := V(q)$, so entsprechen den Lösungspaaren x, y von $(*)$ genau die Schnittpunkte $r_{xy} \in (T_{r_{xx}}\alpha) \cap \beta$. Wenn x die Kurve $\bar{C}_3$ durchläuft, so durchläuft r_{xx} den Kegelschnitt α. Wir wollen nun zeigen, daß die Punke x von $\bar{C}_3$ für welche die Tangente $T_x\bar{C}_3$ auf F liegt, in eineindeutiger Weise den gemeinsamen Punkten von α und β entsprechen.

Man berechnet dazu, daß die Tangente $T_x\bar{C}_3$ von den beiden Punkten $s := (3\lambda^2, 2\lambda\mu, \mu^2, 0)$ und $t := (0, \lambda^2, 2\lambda\mu, 3\mu^2)$ aufgespannt wird (vgl. [2, S.107]). Setzt man wieder $z := s+\varrho t$, so ergibt sich diesmal $(f_1(z), f_2(z), f_3(z)) = -(\mu-\varrho\lambda)^2(\lambda^2, 2\lambda\mu, \mu^2) = -(\mu-\varrho\lambda)^2 r_{xx}$ und daraus die Äquivalenzkette $T_x\bar{C}_3 \subset F \iff q(r_{xx}) = 0 \iff r_{xx} \in \beta$.
Im Fall $\alpha = \beta$ besitzt F die Gleichung

$$4f_1f_3 - f_2^2 = 4x_0x_2^3 + 4x_1^3x_3 + x_0^2x_3^2 - 3x_1^2x_2^2 - 6x_0x_1x_2x_3 = 0 \tag{3.4}$$

und zwar unabhängig von der Wahl der Punkte $A_0, A_3 \in \bar{C}_3$. An der Gleichung erkennt man, daß die Ebene $E = V(x_3)$ die Fläche F längs $T_x\bar{C}_3 = V(\{x_1, x_3\})$ berürt. Dann gibt es aber zu jedem $A_0 \in \bar{C}_3$ eine Ebene, die F längs $T_x\bar{C}_3$ berührt. Nach Satz 1.6.4 ist F dann eine Torse.
Die Behauptung des Satzes ist gezeigt, falls klar ist, daß im Fall $\alpha \neq \beta$ keine Torse vorliegt, denn dann besitzen α und β höchstens vier Schnittpunkte aber auch höchstens vier gemeinsame Tangenten, da $\alpha^\vee$ und $\beta^\vee$ ebenfalls Kegelschnitte sind. Also gibt es eine nichtleere offene Menge $\widetilde{C_3} \subset \bar{C}_3$, so daß für alle $x \in \widetilde{C_3}$ $r_{xx} \notin \beta$ und $(T_{r_{xx}}\alpha) \cap \beta$ zwei verschiedene Punkte enthält, die zwei verschiedenen Sekanten durch x entsprechen.
Die letzte Lücke des Beweises wird nun folgendermaßen geschlossen: Falls es eine Torse geben sollte, für die $\alpha \neq \beta$ ist, so enthält sie nach dem bisher gezeigten bestimmt eine Sekante g von $\bar{C}_3$, die etwa durch die Punkte x und y von $\bar{C}_3$ geht. Wählt man das Koordinatensystems wie zu Anfang dieses Paragraphen bezüglich x und y, so sieht man sofort, daß $T_x\bar{C}_3$ und $T_y\bar{C}_3$ zueinander windschief sind. Da die duale Varietät von F irreduzibel und eindimensional ist, erhält man $\dim \mathrm{Cont}_{x^\vee}F^\vee = \dim \mathrm{Cont}_{y^\vee}F^\vee = 0$, weil schon $x^\vee \cap F^\vee$ und $y^\vee \cap F^\vee$ nulldimensional sind (im Fall $F^\vee \subset x^\vee$ bzw. $F^\vee \subset x^\vee$ wäre F ein Kegel mit Spitze x bzw. y). Das führt Satz 1.6.2 (b) zufolge auf die Beziehungen

$$(TC_xF)^\vee = \mathrm{Cont}_{x^\vee}F^\vee \text{ und } (TC_yF)^\vee = \mathrm{Cont}_{y^\vee}F^\vee.$$

Nun ist g bestimmt Berührort einer Ebene E, da anderfalls $g^\vee \subseteq F^\vee$ gelten würde, also $\mathrm{Cont}_EF = g$. Es gilt $E \subseteq TC_xF \cap TC_yF$, da $E^\vee \in \mathrm{Cont}_{x^\vee}F^\vee \cap \mathrm{Cont}_{y^\vee}F^\vee$ aus $x, y \in \mathrm{Cont}_EF$ wegen $(x, E^\vee), (y, E^\vee) \in CF = CF^\vee$ (Reflexivität!) folgt. Aus $\mathrm{Sing}_3F = \emptyset$ (Satz 3.2.2) liefert Satz 2.6.1 $T_x\bar{C}_3 \subset E$ und $T_y\bar{C}_3 \subset E$, was aber der Feststellung widerspricht, daß diese beiden Tangenten windschief sind. ■

Im folgenden wird wieder die Bezeichnung $P(F)$ für die projektive Untervarietät der Plückerquadrik P verwendet, deren Punkte den sämtlichen Geraden von F entsprechen (siehe Paragraph 2.5). Den eindimensionalen Anteil von $P(F)$ bezeichnen wir wieder durch $P(F)^1$. Der vorige Satz lehrt nun unmittelbar, daß die Quartiken mit irreduzibler kubischer Doppelpunktskurve stets Regelflächen sind. Deswegen ist nach Satz 2.5.3 $P(F)$ eindimensional und $P(F)^1$ irreduzibel. Darüberhinaus gilt nun

Satz 3.3.3. *Für eine Quartik F mit irreduzibler kubischer Doppelpunktskurve $\bar{C}_3$ ist die Varietät $P(F)^1$ in einem eindeutig bestimmten linearen Geradenkomplex K_1 enthalten. Ist K_1 ein spezieller Komplex mit Leitgerade l, so folgt $l \subset F$ und $l \cap \operatorname{Sing} F = \emptyset$.*

Beweis. Behauptung 1: $P(F)^1 \subset K_1$ mit einem geeigneten linearen Komplex K_1.
Es werden weitgehend die Notationen des letzten Beweises übernommen. Abgesehen von Proportionalitätsfaktoren berechnet man die Plückerkoordinaten $p = (p_{01}, p_{02}, p_{03}, p_{12}, p_{13}, p_{23})$ der Verbindungsgeraden zweier verschiedener Punkte $x, y \in \bar{C}_3$ zu

$$p = (\lambda^2\xi^2, \lambda\xi(\lambda\eta + \xi\mu), \lambda^2\eta^2 + \lambda\xi\mu\eta + \xi^2\mu^2, \lambda\xi\mu\eta, \mu\eta(\lambda\eta + \xi\mu), \mu^2\eta^2)$$

und diejenigen einer Tangente $T_x\bar{C}_3$ zu

$$p = (\lambda^4, 2\lambda^3\mu, 3\lambda^2\mu^2, \lambda^2\mu^2, 2\lambda\mu^3, \mu^4).$$

Verwendet man nun die Bezeichnung r_{xy} aus dem letzten Beweis und schreibt für die Komponenten $r_{xy} = (r_0, r_1, r_2)$, so erhält man in beiden Fällen

$$p = (r_0^2, r_0r_1, r_1^2 - r_0r_2, r_0r_2, r_2r_1, r_2^2). \tag{$*$}$$

Ist nun $A = (a_{ij})_{i,j=0,1,2}$ die Darstellungsmatrix der quadratischen Form q (d.h. $q(x) = x^*Ax$, beachte auch $\det A \neq 0$, da q irreduzibel ist), so ergibt sich aus der Bedingung $r_{xy} \in \beta = V(q)$ die Gleichung

$$a_{00}p_{01} + 2a_{01}p_{02} + a_{11}p_{03} + (2a_{02} + a_{11})p_{12} + 2a_{12}p_{13} + a_{22}p_{23} = 0, \tag{3.5}$$

die folglich von allen auf F gelegenen Sekanten oder Tangente von $\bar{C}_3$ erfüllt wird. Gleichung (3.5) stellt einen linearen Geradenkomplex K_1 dar. Die Irreduzibilität von $P(F)^1$ liefert $P(F)^1 \subset K_1$, da mit Sicherheit unendlich viele Geraden von $P(F)^1$ in K_1 liegen.
Behauptung 2: Der lineare Komplex K_1 ist eindeutig.
Die Gleichung $q(r_{xy}) = 0$ definiert eine Hyperfläche in $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ (in den Koordinaten $((\lambda, \mu), (\xi, \eta))$), so daß Satz 1.3.2 zufolge die Koeffizienten dieser Gleichung bis auf einen skalaren Faktor festliegen. Ist nun K_1' ein weiterer linearer Komplex mit $P(F)^1 \subset K_1'$, so kann man in seine Gleichung die Ausdrücke $(*)$ substituieren. Koeffizientenvergleich mit $q(r_{xy}) = 0$ liefert die Behauptung.
Behauptung 3: Falls K_1 ein spezieller Komplex mit Leitgerade l ist, so ist l in F enthalten.
Wäre der Schnitt $l \cap F$ endlich, so gäbe es einen Punkt aus $l \cap F$, durch den unendlich viele Geraden von $P(F)$ gehen, und folglich wäre F ein Kegel, der diesen Punkt zur Spitze hat, was aber unmöglich ist.
Behauptung 4: Ist l Leitgerade von K_1, so enthält l keinen singulären Punkt von F.

Gemäß Satz 2.5.1 schneidet jede Ebene $E^\vee \in l^\vee$ die Quartik F nur in Geraden, da es durch jeden Punkt von l eine von l verschiedene Gerade auf F gibt (vgl. Korollar 2.5.2). Wäre $x \in l$ singulär für F, dann gilt $\mu_x((E \cap F)^{div}) \geq 2$ (Lemma 2.5.5 (a)). Wegen $l \not\subseteq \operatorname{Sing} F$ (Satz 3.2.2) ist $(E \cap F)^{div} = 2l + R$ (mit einem Restdivisor R) nur für eine Ebene durch l möglich, die dann F längs l berührt. In allen anderen Ebenen durch l gibt es eine von l verschiedene auf F gelegene Gerade durch x. Demzufolge wäre aber F ein Kegel mit Spitze x, was wiederum ausgeschlossen ist.
Aus den Behauptungen 1 bis 4 folgen nun alle Behauptungen des Satzes. ∎

Satz 3.3.4. *Falls K_1 ein spezieller linearer Komplex ist, so besitzt F überhaupt keine Kegelschnitte, also $C_{1,2}(F)^{irr} = \emptyset$.*

Beweis. Im Beweis von Satz 3.3.3 (Behauptung 4) wurde bereits eingesehen, daß jeder Schnitt einer Ebene durch die Leitgerade l mit F voll in Geraden zerfällt. Wir nehmen daher einen Kegelschnitt C_2 auf F an, dessen Trägerebene E die Leitgerade l nicht enthält. Nach Satz 2.5.7 hat man $(F \cap E)^{div} = C_2 + g_1 + g_2$ mit zwei Geraden g_1, g_2.
Fall 1: $g_1 \cap l = g_2 \cap l =: x$.
Wegen $l \cap \operatorname{Sing} F = \emptyset$ (Satz 3.3.3) ist x regulär für F aber $\mu_x((E \cap F)^{div}) \geq \mu_x(g_1) + \mu_x(g_2) = 2$. Nach Lemma 2.5.5 gilt $T_xF = E$ und man erhält mit $E \supset T_x l = l$ einen Widerspruch zur Annahme.
Fall 2: $g_1 \cap l \neq g_2 \cap l$.
Der Fall führt unmittelbar auf einen Widerspruch zu $l \not\subset E$. ∎

Lemma 3.3.5. *Sei K ein linearer Geradenkomplex, welcher drei nicht kopunktale Geraden einer Ebene enthält. Dann ist K speziell.*

Beweis. Den drei nicht kopunktalen Geraden in der Ebene entsprechen drei linear unabhängige Punke auf der Plückerquadrik P und die von diesen aufgespannte Ebene E des $\mathbb{P}^5$ ist in P enthalten. Die Punkte dieser Ebene entsprechen den Geraden der Ebene des $\mathbb{P}^3$, welche die drei gegebenen enthält. Ist H die Hyperebene des $\mathbb{P}^5$, die den Komplex K aus P ausschneidet ($K = P \cap H$), so folgt $E \subset H$ also auch $E \subset K$. Nun ist K als Teilmenge des $\mathbb{P}^5$ eine Quadrik in einem vierdimensionalen projektiven Unterraum. Eine solche ist aber, sofern sie eine Ebene enthält, ein Kegel, denn wählt man Koordinaten etwa so, daß die rechte untere 3×3–Untermatrix der Darstellungsmatrix M dieser Quadrik die Nullmatrix ist (also $A_2, A_3, A_4 \in E$), so erkennt man sofort $rang\ M \leq 3$. Da P singularitätenfrei ist, muß H die Plückerquadrik berühren (Lemma 2.5.5). Das heißt aber, daß K ein spezieller Komplex ist, dessen Leitgerade dem Berührpunkt von P und H entspricht. ∎

Satz 3.3.6. *Falls K_1 ein allgemeiner linearer Komplex ist, so besitzt F eine irreduzible einparametrige Familie von Kegelschnitten.*

Beweis. Zu zeigen: $card\, C_{1,2}(F)^{irr} = \infty$ (daraus folgt $\dim C_{1,2}(F)^{irr} \geq 1$). Es wird zunächst der Fall betrachtet, daß F eine Torse ist. Zu jedem $x \in \bar{C}_3$ sei E_x die längs $T_x\bar{C}_3$ berührende Tangentialebene von F. Da man im Koordinatensystem stets $A_0 := x$ wählen kann, lehrt Gleichung (3.4), daß jede Ebene $E_x = V(x_3)$ einen Kegelschnitt aus F ausschneidet, welcher $T_x\bar{C}_3$ in x berührt. Für den Fall, daß F keine Torse ist, sei mit $\widetilde{C_3}$ die nichtleere offene Menge aller Punkte $x \in \bar{C}_3$ bezeichnet, durch die zwei verschiedene Geraden g_x, h_x der Fläche gehen (Satz 3.3.2) und deren Verbindungsebene E_x die Quartik nicht längs der beiden Geraden g_x, h_x berührt (beachte Satz 1.6.4). Für die Kurven $C_x := \overline{(E_x \cap F)\backslash(g_x \cup h_x)} \neq \emptyset$ gilt $\deg C_x \leq 2$. Nach Lemma 3.3.5 können die C_x nicht in Geraden zerfallen, da sonst in E_x drei nicht kopunktale Geraden existieren würden. Denn mindestens eine der Geraden, in die C_x zerfällt, muß durch einen der beiden von x verschiedenen Schnittpunkte von $g_x \cup h_x$ mit $\bar{C}_3$ gehen, da diese im Schnitt $(E_x \cap F)^{div}$ nach Lemma 2.5.5 (a) zweifache Vielfachheiten besitzen. Diese Gerade geht dann nicht durch x, da sie von g_x und h_x verschieden ist. Also sind für alle $x \in \widetilde{C_3}$ die C_x Kegelschnitte, so daß auch in diesem Fall die Behauptung gezeigt ist.

Bemerkung: Die Mathematiker des letzten Jahrhunderts haben gezeigt, daß F, falls K_1 allgemein, aber F keine Torse ist, projektiv äquivalent zu ihrer dualen Varietät ist. Die Trägerebenen der Kegelschnitte berühren F in zwei Punkten und gehören daher zur Doppelpunktskurve von $F^\vee$. Hierzu, wie auch zu den übrigen Ausführungen dieses Paragraphen vergleiche man [16, S.437] und [15, S.1748].

Faßt man die Sätze dieses Abschnittes zusammen, so kann man die Quartiken vom Typ (a) gemäß Paragraph 3.2, die sich allesamt als Regelflächen erwiesen haben, in zwei Untertypen (a1) und (a2) aufteilen, je nachdem ob der lineare Komplex K_1 aus Satz 3.3.3 speziell oder allgemein ist. Im ersten Fall besitzen die Quartiken überhaupt keine Kegelschnitte, im zweiten hingegen eine einparametrige Familie von Kegelschnitten.

3.4 Die Untersuchungsmethode von Segre

Für die Behandlung der Quartiken der Typen (b) bis (f) aber auch zum Teil des Typs (h) (gemäß 3.2) bedienen wir uns einer Untersuchungsmethode, die von *C. Segre* 1884 ([18]) eingeführt wurde, und die es uns gestattet, sämtliche

Kegelschnitte auf diesen Flächen aufzufinden. Man betrachtet dabei im vierdimensionalen Raum $\mathbb{P}^4$ zwei quadratische Hyperflächen Q_1 und Q_2. Das von diesen aufgespannte *lineare Büschel* von Quadriken bezeichnen wir durchweg mit

$$L := \{Q := V(\lambda f_1 + \mu f_2) \mid \lambda, \mu \in k, (\lambda, \mu) \neq (0,0)\}. \tag{3.6}$$

Darin bedeuten f_1 und f_2 die quadratischen homogenen Formen des Polynomrings $k[x_0, \ldots, x_4]$, deren Nullstellenmengen Q_1 beziehungsweise Q_2 sind. Der Schnitt

$$\Phi := Q_1 \cap Q_2 \tag{3.7}$$

ist eine Fläche, deren Irreduzibilität wir zunächst annehmen. Satz 2.1.3 lehrt $\deg \Phi \leq 4$, wenn man Φ mit beliebigen Ebenen E schneidet und Satz 2.1.4 auf die ebenen Kurven (höchstens zweiten Grades) $E \cap Q_1$ und $E \cap Q_2$ anwendet. Offenbar gilt für $Q_1', Q_2' \in L$ ebenfalls $\Phi = Q_1' \cap Q_2'$ (vgl. Lemma 2.3.2). Projiziert man nun Φ von einem beliebigen Punkt $y \in \mathbb{P}^4 \backslash \Phi$ auf eine Hyperebene H, welche y nicht enthält und die wir stets mit $\mathbb{P}^3$ identifizieren wollen (d.h. wir nehmen i.d.R. an, daß die Koordinatengrundpunkte $A_0, \ldots, A_3$ in H liegen), so erhält man i.a. eine Quartik des $\mathbb{P}^3$. Die Projektion vom Punkt y auf H bezeichnen wir durchweg mit

$$\pi_y : \mathbb{P}^4 \backslash \{y\} \to H. \tag{3.8}$$

Wir untersuchen zunächst, welche Art von Quartiken des $\mathbb{P}^3$ man durch eine solche Projektion erhalten kann.

Satz 3.4.1. *Zu einer Quartik F des $\mathbb{P}^3$ gibt es genau dann einen Punkt y und eine Fläche Φ im $\mathbb{P}^4$ der oben definierten Art mit $\pi_y(\Phi) = F$, wenn sich das irreduzible homogene Polynom f, dessen Nullstellenmenge F ist, in der Form $f = u_2^2 - u_1^2 v_2$ mit Polynomen $u_1, u_2, v_2 \in k[x_0, \ldots, x_3]$, welche homogen vom Grad der Indizes sind, schreiben läßt.*

Beweis. Zu den Quadriken Q_1 und Q_2 gehören symetrische Darstellungsmatrizen A_1 und A_2 (d.h. $f_i(x) = x^* A_i x$ für $i = 1, 2$). Die von diesen induzierten Bilinearformen $g_i(x, y) := x^* A_i y$ sind die Polarformen der Q_i. Damit gilt

$$f_i(\lambda x + \mu y) = \lambda^2 f_i(x) + 2\lambda\mu g_i(x, y) + \mu^2 f_i(x) \text{ für } i = 1, 2.$$

Es wird nun die Gleichung des Kegels mit Spitze y an die Fläche Φ aufgestellt. Dazu hat man die Resultante der beiden Polynome $f_i(\lambda x + \mu y)$ in den Unbestimmten λ und μ zu bilden, denn diese verschwindet genau für diejenigen Punkte x, für die diese beiden Polynome eine gemeinsame Nullstelle besitzen, und dies sind gerade die Punkte, deren Verbindungsgerade mit y die Fläche Φ schneidet. Die Resultante $R(p_1, p_2)$ zweier quadratischer Polynome $p_i := a_i \lambda^2 + 2b_i \lambda\mu + c_i \mu^2$ $(i = 1, 2)$ berechnet sich zu

$$R(p_1, p_2) = (c_1 a_2 - c_2 a_1)^2 + 4(b_1 a_2 - b_2 a_1)(b_1 c_2 - b_2 c_1).$$

Also hat der Kegel $Z := \{x \in \mathbb{P}^4 \backslash \{y\} \mid \overline{xy} \cap \Phi \neq \emptyset\} \cup \{y\}$ ($\overline{xy}$ bezeichne die Verbindungsgerade von x und y) die Gleichung

$$g = (f_1(x)f_2(y) - f_1(y)f_2(x))^2 +$$

$$+4(f_1(x)g_2(x,y) - f_2(x)g_1(x,y))(f_1(y)g_2(x,y) - f_2(y)g_1(x,y)) = 0.$$

Man kann nun o.B.d.A. $y \in Q_1$ annehmen, da in L stets eine Quadrik existiert, welche y enthält (vgl. Lemma 2.3.1), also $\alpha := f_2(y) \neq 0$ und wegen $f_1(y) = 0$ vereinfacht sich obige Gleichung zu

$$g = \alpha^2 f_1(x)^2 - 4\alpha g_1(x,y)(f_1(x)g_2(x,y) - f_2(x)g_1(x,y)) =$$

$$= (\alpha f_1(x) - 2g_1(x,y)g_2(x,y))^2 - 4g_1(x,y)^2(g_2(x,y)^2 - \alpha f_2(x)) = 0. \tag{3.9}$$

Setzt man hierin $x_4 = 0$, so folgt wegen $F = Z \cap V(x_4)$ die Notwendigkeit der Gestalt von f. Um einzusehen, daß diese Gestalt auch hinreichend ist, definiert man zu vorgegebenem $f = u_2^2 - u_1^2 v_2$ die Quadriken Q_1 und Q_2 durch die Gleichungen $f_1 := u_2 + 2u_1x_4 = 0$ und $f_2 := x_4^2 - \frac{1}{4}v_2 = 0$ und wählt $y = (0,0,0,0,1)$. Dann gilt $f_1(y) = 0, f_2(y) = \alpha = 1, g_1(x,y) = u_1(x)$ und schließlich $g_2(x,y) = x_4$. Setzt man dies in Gleichung (3.9) ein, so erhält man für die Fläche $\Phi := V(f_1) \cap V(f_2)$ gerade $\pi_y(\Phi) = Z \cap H = F$ (wie eingangs ist H die Hyperebene $V(x_4)$). ■

Bemerkung 3.4.2. Eine beliebige Fläche $\Phi := V(f_1) \cap V(f_2)$ mit $\pi_y(\Phi) = F = V(u_2^2 - u_1^1 v_2)$ ist unter der Voraussetzung, daß u_1 proportional zu $g_1(x,y)$ ist, stets projektiv äquivalent zu der im zweiten Beweisschritt definierten Fläche $\widetilde{\Phi} = V(u_2 + 2u_1x_4) \cap V(x_4^2 - \frac{1}{4}v_2)$.

Beweis. Man wählt bei fester Vorgabe von F aber beliebiger Vorgabe von $\Phi = Q_1 \cap Q_2$ und $y \in Q_1$ zunächst y als Koordinatengrundpunkt A_4. Dann ist in (3.9) $g \in k[x_0, \ldots, x_3]$, da y die Spitze des Kegels Z ist, und man kann g so normieren, daß $g = f = u_2^2 - u_1^2 v_2$ gilt. Nun ist $g_1(x,y)$ proportional zu u_1. Das ergibt für f_1 zunächst den Ansatz $f_1 = w_2 + \lambda u_1 x_4$ mit homogenem und quadratischem $w_2 \in k[x_0, \ldots, x_3]$ sowie $\lambda \in k$. Demzufolge ergibt (3.9) $g = w_2^2 + u_1 r_3$ mit einem Restpolynom $r_3 \in k[x_0, \ldots, x_3]$ von drittem Grad. Nun sieht man, daß das Primelement u_1 die Form $u_2 + w_2$ oder $u_2 - w_2$ teilt ($u_2^2 - w_2^2 = u_1(u_1v_2 + r_3)$). In beiden Fällen findet man für die eindeutig bestimmte Quadrik $Q_1 \in L$ mit $y \in Q_1$ als Gleichung $f_1 = u_2 + 2u_1v_1$ mit einem $v_1 \in k[x_0, \ldots, x_4]$ und $v_1(y) \neq 0$. Nun kann man die Koordinatengrundpunkte $A_0, \ldots, A_3$ längs der Erzeugenden von Z, auf denen sie liegen, in die Hyperebene $H' := V(v_1)$ verschieben. Das Polynom g ändert sich bei dieser Koordinatentransformation nicht, wohl aber transformiert sich die Gleichung von Q_1 bei geeigneter Wahl des Normierungspunktes des Koordinatensystems auf die Gestalt $f_1 = u_2 + 2u_1x_4 = 0$. Bezeichnet man $w_1 := g_2(x,y)$, so folgt aus (3.9) $g = u_2^2 + 4u_1(x_4 - w_1)u_2 - 4u_1^2(w_1^2 - f_2 - (x_4 - w_1)^2)$ und aus einem

Vergleich mit $g = u_2^2 - u_1^2 v_2$ erhält man $(x_4 - w_1)u_2 = u_1(2x_4 w_1 - f_2 - x_4^2 - \frac{1}{4}v_2)$. Im Fall $w_1 = x_4$ ergibt sich unmittelbar $f_2 = x_4^2 - \frac{1}{4}v_2$. Für $w_1 \neq x_4$ liefert die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung in $k[x_0, \dots, x_4]$ die Existenz eines skalaren Faktors λ mit $w_1 = x_4 - \lambda u_1$ (u_1 kann u_2 wegen der Irreduzibilität von f_1 nicht teilen) und man erhält $f_2 = x_4^2 - \frac{1}{4}v_2 - \lambda f_1$. In beiden Fällen sieht man aber, daß die hier beliebig vorgegebene Fläche Φ in geeignetem Koordinatensystem dieselben Gleichungen wie $\widetilde{\Phi}$ besitzt, woraus die Behauptung folgt. ■

Korollar 3.4.3. *Für eine Quartik F, zu der y und Φ gemäß obiger Vereinbarung existieren, enthält* $\operatorname{Sing} F$ *die Kurve $Y := \pi_y(T_y Q) \cap F = V(\{u_2, u_1\})$, wobei $Q \in L$ (siehe* (3.6)*) die Quadrik mit $y \in Q$ ist. Y ist ein Kegelschnitt, ein Paar von Geraden oder eine einzelne Gerade, je nachdem ob Q singularitätenfrei, ein Kegel mit nulldimensionalem singulären Ort (Kegel erster Art) oder ein Kegel mit einer Geraden als Spitze (Kegel zweiter Art) ist.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus (3.9), wenn man $T_y Q = V(g_1(x, y))$ beachtet und berücksichtigt, daß $T_y Q \cap Q$ ein irreduzibler Kegel, ein paar verschiedener Ebenen bzw. eine einzelne Ebene je nach den obigen drei Fällen ist (betrachte die Ableitungen von g in (3.9)). Das Projektionszentrum y kann nicht in der Spitze eines Kegels Q aus L liegen, da sonst $F = H \cap Q$ eine Quadrik wäre. ■

Satz 3.4.4. *Sei $C_2 \subset \Phi$ ein Kegelschnitt oder ein Paar sich schneidender Geraden. Ist $E \subset \mathbb{P}^4$ die Trägerebene von C_2, so gibt es in L einen Kegel Q, welcher E enthält. Ist umgekehrt $Q \in L$ ein Kegel und $E \subset Q$ eine Ebene, so ist der Schnitt $E \cap \Phi$ ein Kegelschnitt, ein Paar von Geraden oder eine einzelne Gerade.*

Beweis. Die zweite Behauptung des Satzes ist sofort klar, da für jede Ebene $E \subset Q$ unter der Annahme $Q \neq Q_1$ (o.B.d.A.) $E \cap \Phi = E \cap Q_1$ gilt. Weil Φ nach Voraussetzung irreduzibel ist, gilt außerdem $E \not\subseteq \Phi$. Zum Beweis der ersten Behauptung sei $x \in E \backslash C_2$. Dann gibt es eine Quadrik $Q \in L$ mit $x \in Q$. Aus $C_2 \subset Q$ folgt dann $E \subset Q$ (wende Satz 2.1.3 auf Geraden durch x in E an). Im Beweis des Lemmas 3.3.5 wurde aber bereits bemerkt, daß eine Quadrik im $\mathbb{P}^4$, welche eine Ebene enthält, notwendigerweise ein Kegel ist. ■

An dieser Stelle sollten kurz einige Eigenschaften der irreduziblen dreidimensionalen quadratischen Kegel des $\mathbb{P}^4$ erwähnt werden. Im Gegensatz zu den quadratischen Kegeln des $\mathbb{P}^3$ gibt es unter diesen zwei verschiedene Arten, entsprechend der Dimension der Kegelspitze. Für diese wurde schon in Korollar 3.4.3 die Benennung erste und zweite Art eingeführt. Entsprechend den zwei linearen Systemen von Geraden auf einer singularitätenfreien Quadrik des $\mathbb{P}^3$ gibt es

auf den Kegeln erster Art zwei lineare Systeme von Ebenen. Zwei Ebenen des gleichen Systems schneiden sich in der Kegelspitze, während sich zwei Ebenen unterschiedlicher Systeme in einer Erzeugenden (Gerade durch die Kegelspitze) des Kegels schneiden. Die Ebenen des einen linearen Systems werden von den Hyperebenen des linearen Büschels aller Hyperebenen durch eine Ebene des anderen Systems ausgeschnitten. Die Tangentialhyperebenen des Kegels berühren längs erzeugender Geraden und schneiden zwei Ebenen je eines der beiden Systeme aus dem Kegel aus.
Ein Kegel zweiter Art besitzt nur ein lineares System von Ebenen, welche alle die Doppelpunktsgerade desselben enthalten. Sie werden von den Elementen des linearen Büschels aller Hyperebenen durch eine der Ebenen des Kegels ausgeschnitten. Die Tangentialhyperebenen berühren diesen längs seiner Ebenen. Nun induzieren die linearen Büschel von Ebenen der Kegel aus L lineare Büschel von Kurven auf Φ, die von den zugehörigen Hyperebenenbüscheln ausgeschnitten werden, und bei denen es sich Satz 3.4.4 zufolge um Geraden, Geradenpaare oder Kegelschnitte handelt.

Satz 3.4.5. *Falls die Fläche Φ irreduzibel und von vierter Ordnung ist, so ist für jedes $y \notin \Phi$, welches nicht die Spitze eines Kegels aus L ist, das Bild $F := \pi_y(\Phi)$ unter der Projektion von y auf die Hyperebene $H \not\ni y$ ebenfalls irreduzibel und von viertem Grad.*

Beweis. Die Fläche F ist irreduzibel nach Satz 1.2.1 und an (3.9) erkennt man, daß ihr Grad höchstens vier ist. Es wird nun angenommen, der Grad von F sei kleiner als vier. Die Form g aus (3.9) ist dann Potenz eines irreduziblen Polynoms ersten oder zweiten Grades. Also ist Z eine Hyperebene oder Quadrik. Im ersten Fall wäre $\Phi = Q_2 \cap Z$ (o.B.d.A. $y \notin Q_2$) eine quadratische Fläche entgegen der Annahme. Auch im zweiten Fall gilt $\Phi = Q_2 \cap Z$. Würde Z die Quadrik Q_2 längs Φ berühren, so wäre Φ in der Polarhyperebene P von y bezüglich Q_2 enthalten, und wie oben folgt $\deg \Phi = 2$. Also schneidet der Berührkegel von y an Q_2 Z in einer echten abgeschlossenen Teilmenge. Damit gibt es eine nichtleere offene Menge von Erzeugenden von Z, die Q_2 in zwei verschiedenen Punkten schneiden. Demzufolge ist Z die einzige Quadrik, die Φ und y enthält, da eine solche alle diese Erzeugenden enthalten muß (Satz 2.1.3). Nun gibt es in L aber eine Quadrik, welche Φ und y enthält, also folgt $Z \in L$. Dann ist aber y Spitze eines Kegels aus L im Gegensatz zur Annahme.
∎

Satz 3.4.6. *Sei $\pi_y : \Phi \to F$ die Projektion von Φ auf F. Mit Y werde die Kurve nach Korollar 3.4.3 bezeichnet. Dann gilt:*

(a) *Das Bild einer nicht in $\pi_y^{-1}(Y)$ enthaltenen Gerade ist eine Gerade auf F.*

(b) *Das Bild eines nicht in $\pi_y^{-1}(Y)$ enthaltenen Kegelschnitts ist ein Kegelschnitt auf F.*

(c) *Der eindimensionale Anteil des Urbildes einer nicht in Y enthaltenen Geraden ist eine Gerade auf Φ.*

(d) *Das Urbild eines nicht in Y enthaltenen Kegelschnitts ist ein Kegelschnitt auf Φ.*

BEWEIS. Behauptung (a) ist klar, da für eine Gerade g auf Φ wegen $y \notin \Phi$ nicht $\dim \pi_y(g) = 0$ gelten kann.
Zu (b): Wäre für einen Kegelschnitt C_2 das Bild $\pi_y(C_2)$ eine Gerade $g \subset F$, so wäre C_2 in der Verbindungsebene E von y und g enthalten. Folglich ist die Quadrik $Q \in L$ mit $y \in Q$ ein Kegel (siehe Satz 3.4.4) und aus $E \subset T_yQ$ (siehe Abhandlung im Anschluß an Satz 3.4.4) folgt $\pi_y(C_2) \subseteq Y$.
Zu (c): Sei g eine nicht in Y enthaltene Gerade auf F und E die Verbindungsebene von g und y. Es gilt $\dim(E \cap \Phi) = 1$. Betrachtet man nun für zwei beliebige Quadriken $Q_1, Q_2 \in L$ die Schnitte $E \cap Q_1$ und $E \cap Q_2$, so sieht man, daß der eindimensionale Anteil des Schnittes $E \cap Q_1 \cap Q_2 = E \cap \Phi$ als Schnitt zweier Kurven höchstens zweiten Grades eine Gerade, ein Geradenpaar oder ein Kegelschnitt ist. Die beiden letzteren Fälle sind nach Satz 3.4.4 nicht möglich, denn in diesen wäre E in einem Kegel Q aus L enthalten. Gemäß Korollar 3.4.3 gilt dann wegen $E \subset T_yQ \;\; g \subseteq Y$.
Zu (d): Sei $C_2 \subset F, C_2 \nsubseteq Y$ ein Kegelschnitt mit der Trägerebene E und $R := \overline{(E \cap F) \backslash C_2}$ die Restkurve des Schnittes von F mit E (R ist die leere Menge oder eine Kurve). Die Verbindungshyperebene von E und y wird mit V bezeichnet.
Fall 1: $R \neq \emptyset$.
In diesem Fall muß $\Phi \cap V$ Satz 1.2.1 (a) zufolge reduzibel sein. Nun ist $\Phi \cap V$ von höchstens vierter Ordnung (Satz 2.1.3), und daher ist $C := \pi_y^{-1}(C_2) \subset \Phi \cap V$ wegen $R \neq \emptyset$ von höchstens dritter Ordnung. Nach (a) enthält C keine Geraden. Wäre C eine irreduzible kubische Kurve, so wäre $y \in C$ notwendig, da andernfalls $\pi_y(C)$ auch von dritter Ordnung wäre. Dies hätte aber $y \in \Phi$ zur Folge und daraus schließt man, daß C ein Kegelschnitt ist.
Fall 2: $R = \emptyset$.
Sei K der quadratische Kegel von y an C_2 und $C := \pi_y^{-1}(C_2) = \Phi \cap V = \Phi \cap K$. Angenommen, C wäre kein Kegelschnitt. Sei mit $\Phi = Q_1 \cap Q_2$ o.B.d.A. $y \in Q_1$. Durch $Q_1' := Q_1 \cap V$ und $Q_2' := Q_2 \cap V$ werden die durch Q_1 und Q_2 in V induzierten Quadriken bezeichnet. Da $C = Q_1' \cap Q_2'$ nach (a) bestimmt keine Geraden enthält, kann nach Bemerkung 2.1.6 C nur noch von vierter Ordnung sein. Wegen $y \notin Q_2'$ gilt $Q_2' \neq K$ und man erhält $C = Q_2' \cap K$. Daraus erkennt man, daß es eine nichtleere offene Teilmenge von Erzeugenden von K gibt, welche C in zwei verschiedene Punkten schneiden, denn würde der Quadratische Kegel K die Quadrik Q_2' längs C berühren, so wäre C ein Kegelschnitt (vgl. Beweis von Satz 3.4.5 oder Bemerkung 2.1.6). Demzufolge ist aber K die einzige

Quadrik in V, die y und C enthält, da eine solche auch alle diese Erzeugenden enthalten muß, und es folgt $K = Q_1'$, insbesonsere also $\mu_y((V \cap Q_1)^{div}) = 2$. Wie schon oben dargelegt, kann y nur ein regulärer Punkt von Q_1 sein. Man erhält mit Lemma 2.5.5 $V = T_y Q_1$ und daraus einen Widerspruch zu $C_2 \not\subseteq Y$ (Korollar 3.4.3). ■

Satz 3.4.7. *Die Quadrik Q sei ein Kegel des linearen Büschels L. Die Bedeutung der Bezeichnungen L, Φ, π_y und Y entnehme man der Einleitung dieses Paragraphen bzw. Korollar 3.4.3. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(a) *Wenn Q von erster Art ist und $y \notin Q$, dann werden die beiden durch Q induzierten linearen Kurvensysteme auf Φ mittels π_y auf zwei lineare Kurvensysteme auf $F := \pi_y(\Phi)$ abgebildet. Es gibt einen quadratischen Kegel $K \subset \mathbb{P}^3$, so daß jede Tangentialebene von K die Quartik F in zwei Kurven je eines der beiden Systeme schneidet. Alle so projizierten Kurven sind in Tangentialebenen von K enthalten. K wird ein* Kummerscher Kegel *von F genannt.*

(b) *Wenn Q von erster Art ist und $y \in Q$, dann werden die beiden durch Q auf Φ induzierten Kurvensysteme mittels π_y auf die zwei linearen Kurvensysteme auf F abgebildet, deren Kurven von den Ebenen der Büschel ${g_1}^\vee$ und ${g_2}^\vee$ ausgeschnitten werden, wobei Y in die Geraden g_1 und g_2 zerfällt und die festen Bestandteile g_1 bzw. g_2 aus diesen Kurvensystemen entfernt sind (siehe Paragraph 2.4).*

(c) *Wenn Q von zweiter Art ist und $y \notin Q$, dann wird das durch Q auf Φ induzierte Kurvensystem mittels π_y auf ein lineares Kurvensystem auf F abgebildet, dessen Kurven von den Ebenen eines linearen Büschels $g^\vee$ ausgeschnitten werden.*

(d) *Wenn Q von zweiter Art ist und $y \in Q$, dann wird das durch Q auf Φ induzierte Kurvensystem mittels π_y auf das lineare Kurvensystem auf F abgebildet, dessen Kurven von den Ebenen des linearen Büschels $g^\vee$ ausgeschnitten werden, wobei $g = Y$ gilt und der feste Bestandteil g aus diesem Kurvensystem entfernt ist.*

Beweis. Zu (a): Da man bei Abänderung der Projektionshyperebene H auf eine zu F projektiv äquivalente Fläche geführt wird, kann man o.B.d.A. H als Polarhyperebene von y bezüglich Q annehmen. Insbesondere geht dann H durch die Spitze s von Q (gilt für alle Polarhyperebenen), so daß $K := H \cap Q$ ein quadratischer irreduzibler Kegel ist (H ist keine Tangentialhyperebene wegen $y \notin Q$). Durch jede Erzeugende von K gehen zwei Ebenen von Q, da jene ebenso Erzeugende von Q sind. Andererseits enthält jede Ebene auf Q eine Erzeugende von K, nämlich die Schnittgerade mit H. Die Tangentialhyperebene $T_x Q$ in $x \in K \backslash s$ geht durch y (Polareneigenschaft!) und es gilt $T_x Q \cap H = T_x K$ also $\pi_y(T_x Q) = T_x K$. Demnach werden die beiden von

T_xQ aus Q ausgeschnittenen Ebenen auf T_xK abgebildet, und da man so alle Ebenen auf Q erreicht folgt die Behauptung (a) abgesehen davon, daß es sich wieder um ein lineares System von Kurven auf F handelt. Zwar folgt dieser letzte Schritt aus der Birationalität von π_y, dennoch soll er hier explizit durchgeführt werden. Dazu nehmen wir in Gleichung (3.9) o.B.d.A. $Q = V(f_2)$ an. Man kann Koordinaten so wählen, daß $H = V(x_4)$ und $T_yQ_1 = V(x_3)$ gilt. Weil H polar zu y ist, muß $g_2(x,y)$ proportional zu x_4 sein. Durch Nullsetzen von x_4 erhält man die quadratischen Formen $u_2 := \alpha f_1(x_1,x_2,x_3,0)$ und $v_2 := \alpha f_2(x_1,x_2,x_3,0)$ aus $k[x_0,\ldots,x_3]$ und es gilt $K = V(v_2)$. Nun ist K ein irreduzibler Kegel. Folglich gibt es lineare Formen u_1, v_1 und w_1 mit $v_2 = u_1w_1 - v_1^2$. Die Gleichung von F schreibt sich dann (gemäß (3.9))

$$f = u_2^2 + 4x_3^2(u_1w_1 - v_1^2) = 0. \qquad (*)$$

Die Elemente des linearen Büschels M von Divisoren zweiten Grades des $\mathbb{P}^3$, welches durch den eindimensionalen linearen Unterraum

$$U := \{u_{\lambda\mu} := \mu u_2 + 2x_3(\lambda u_1 - \mu v_1) \mid \lambda,\mu \in k,\ (\lambda,\mu) \neq (0,0)\}$$

homogener quadratischer Formen gegeben ist, schneiden F sowohl in $Y = V(\{u_2, x_3\})$ als auch in den Kurven $C_0 := V(\{u_{01}, u_1\})$ und

$$C_{\lambda\mu} := V(\{u_{\lambda\mu}, e_{\lambda\mu}\}),$$

wobei $(\lambda,\mu) \neq (1,0)$ und $e_{\lambda\mu} := \lambda^2 u_1 - 2\lambda\mu v_1 + \mu^2 w_1$ ist. Man bestätigt dies durch Einsetzen von $\mu u_2 = -2x_3(\lambda u_1 - \mu v_1)$ in $\mu^2 f$ (in $(*)$), was auf $4x_3^2 u_1 e_{\lambda\mu} = 0$ führt. Die Ebenen $V(e_{\lambda\mu})$ sind nun aber gerade die Tangentialebenen von K. Das von M erzeugte lineare Kurvensystem auf F besitzt daher den festen Bestandteil $Y \cup C_0$. Entfernt man diesen, so erhält man eines der beiden linearen Kurvensysteme. Das andere erhält man, wenn man anstelle der Polynome $u_{\lambda\mu}$ die Formen $v_{\lambda\mu} := \mu u_2 + 2x_3(\lambda u_1 + \mu v_1)$ betrachtet. Zu diesen Ausführungen vergleiche man [12, S.39].

Zu (b): Es ist $T_yQ \cap Q = E_1 \cup E_2$ mit zwei verschiedenen Ebenen E_1 und E_2, die je einem der beiden linearen System L_1 und L_2 von Ebenen auf Q angehören. Alle Ebenen von L_1 schneiden E_2 in einer Geraden und alle zu L_2 gehörigen Ebenen schneiden E_1 in einer Geraden. Deshalb werden alle Ebenen aus L_1 auf Ebenen durch $g_2 := \pi_y(E_2)$ und alle Ebenen aus L_2 auf solche durch $g_1 := \pi_y(E_1)$ abgebildet. Wegen $g_1 \cup g_2 = Y$ folgt daraus die Behauptung.

Zu (c): Sei s die eindimensionalen Spitze von Q. Nun gehen alle Ebenen von Q durch s und werden daher auf Ebenen durch $g := \pi_y(s)$ abgebildet, woraus die Behauptung folgt.

Zu (d): Da $y \notin s$, aber $T_yQ \supset s$ für die eindimensionale Spitze s von Q gilt, hat man $\pi_y(s) = Y$ (Korollar 3.4.3). Nun geht jede Ebene von Q durch s, also ihr Bild durch Y. ∎

Satz 3.4.8. *Die Fläche Φ sei von vierter Ordnung und kein Kegel. Alle Quadriken des linearen Büschels L (siehe (3.6)) seien Kegel. Dann gibt es eine nichtleere offene Teilmenge $\widetilde{L} \subseteq L$ mit der Eigenschaft, daß alle Quadriken aus $\widetilde{L}$ Kegel erster Art sind. Weiterhin gibt es genau eine Gerade g auf Φ. Auf dieser liegen die Spitzen aller Kegel aus $\widetilde{L}$ und umgekehrt ist jeder Punkt von g in der Spitze eines Kegels aus L enthalten.*

Beweis. Um den ersten Teil der Behauptung zu zeigen, genügt es, einen Kegel erster Art in L zu finden, da die Menge der Kegel erster Art in der der quadratischen Kegel des $\mathbb{P}^4$ offen ist (Determinantenbedingung!). Wir nehmen nun an, es gäbe einen solchen nicht. Es gibt in L dann sicherlich einen Kegel Q_1 zweiter Art, denn wären alle Elemente aus L reduzibel, so würde Φ als Schnitt zweier Hyperebenenpaare in Ebenen zerfallen. Mit Hilfe des *Sylvesterschen Trägheitssatzes* läßt sich die Darstellungsmatrix A_1 von Q_1 auf eine Gestalt transformieren, in der die linke obere 3×3–Untermatrix die Einheitsmatrix ist und alle übrigen Einträge null sind. Die Matrix von Q_2 sei $A_2 = (a_{ij})_{i,j=0,\dots,4}$. Wenn es in L keine Kegel erster Art gibt, verschwinden $\det(A_1\lambda + A_2)$ und alle 4×4–Unterdeterminanten davon identisch in λ. Der Koeffizient des Terms λ^3 in der durch Streichen der vierten Zeile und Spalte entstehenden Unterdeterminante ist a_{33}. Streicht man die dritte Zeile und Spalte, so erhält man als Koeffizient von λ^3 die Zahl a_{44}. Deshalb gilt $a_{33} = a_{44} = 0$. Nun berechnet man die Koeffizienten von λ^3 im Polynom $\det(A_1\lambda + A_2)$ zu $\det\begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}$ und man schließt $a_{34} = 0$. Daher muß die Spitze s_1 von Q_1 (dies ist die Verbindungsgerade der beiden Punkte (0,0,0,1,0) und (0,0,0,0,1)) auf Q_2 liegen. Allerdings ist die Spitze s_1 von der von Q_2 verschieden, denn andernfalls wäre die Verbindungsebene eines beliebigen Punktes $x \in \Phi\backslash s_1$ mit s_1 in Φ enthalten und das widerspricht den Voraussetzungen über Φ. Dennoch schneidet s_1 die Spitze s_2 von Q_2, da alle Geraden auf einem Kegel zweiter Art dessen Spitze schneiden. Dann sind s_1 und s_2 aber in einer Ebene enthalten und auch diese müßte in Φ enthalten sein. Also gelangt man auch hier zu einem Widerspruch und die Annahme, daß es keinen Kegel erster Art in L gibt, muß verworfen werden.
Für das weitere sei Q_1 ein Kegel erster Art. Wir schreiben dessen Darstellungsmatrix A_1 mit Hilfe des Trägheitssatzes in der Gestalt

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nach der Voraussetzung, daß alle Elemente des linearen Büschels L Kegel sind, muß immerhin noch $\det(A_1\lambda + A_2)$ identisch in λ verschwinden. Wie oben sieht man, daß für die Darstellungsmatrix A_2 von Q_2 daraus $a_{44} = 0$ resultiert, und man folgert, daß die Spitze $s_1 = (0, 0, 0, 0, 1)$ von Q_1 auf Φ liegen muß. Da

Q_1 jeder beliebige Kegel aus $\widetilde{L}$ sein kann, liegen alle solche Spitzen auf Φ. Für zwei verschiede Elemente aus $\widetilde{L}$ sind auch deren Spitzen s_1, s_2 verschieden, denn andernfalls läge für jedes $x \in \Phi \backslash s_1$ die Verbindungsgerade von x und s_1 auf Φ und Φ wäre entgegen der Voraussetzung ein Kegel. Die Verbindungsgerade von s_1 und s_2 liegt dann auf Φ, da sie sowohl auf Q_1 als auch auf Q_2 liegt. Nun können keine drei Spitzen zu Kegeln aus $\widetilde{L}$ eine Ebene aufspannen, da diese sonst in Φ enthalten wäre. Denn die drei Spitzen liegen in allen drei zugehörigen Kegeln, also auch deren Verbindungsebene, da die Kegel von zweiter Ordnung sind (Satz 2.1.3). Somit liegen alle diese Kegelspitzen auf einer Geraden $g \subset \Phi$. Wählt man nun bei vorgegebenen $Q_1, Q_2 \in \widetilde{L}$ das Koordinatensystem neu, so daß für die zugehörigen Spitzen $s_1 = (0,0,0,0,1)$ und $s_2 = (1,0,0,0,0)$ gilt, dann erhält man für die Darstellungsmatrizen $A_1 = (a_{ij})_{i,j=0,\ldots,4}$ und $A_2 = (b_{ij})_{i,j=0,\ldots,4}$ von Q_1 und Q_2 $a_{00} = a_{i4} = a_{4i} = 0$ sowie $b_{44} = b_{i0} = b_{0i} = 0$ für $i = 0, \ldots, 4$. Da es nun auf g mindestens drei Spitzen gibt, sind $a := (0, a_{01}, a_{02}, a_{03}, 0)$ und $b := (0, b_{14}, a_{24}, a_{34}, 0)$ linear abhängig, etwa $\sigma a + \tau b = 0$ ($\sigma = \lambda\xi$ und $\tau = \mu\eta$ falls $\lambda s_1 + \mu s_2$ Spitze des Kegels mit Darstellungsmatrix $\xi A_1 + \eta A_2$ ist). Ein beliebiger Punkt $x = (\lambda, 0, 0, 0, \mu) \in g \backslash \{s_1, s_2\}$ ist daher Spitze der Quadrik $Q \in L$ mit der Darstellungsmatrix $\frac{\sigma}{\lambda} A_1 + \frac{\tau}{\mu} A_2$.
Es bleibt zu zeigen, daß g die einzige Gerade auf Φ ist. Dazu nehmen wir eine weitere Gerade $h \subset \Phi$ an und betrachten zunächst den Fall, wo sich g und h schneiden, also in einer Ebene E enthalten sind. Betrachtet man zwei verschieden Spitzen $s_1, s_2 \in g \backslash h$, so ist E in den beiden zugehörigen Quadriken Q_1 und Q_2 enthalten und man wird abermals auf den Widerspruch $E \subseteq \Phi$ geführt. Nun können g und h nur noch windschief sein. Zu einem beliebigen $s_1 \in g$ sei E die Verbindungsebene von s_1 und h. Satz 3.4.4 zufolge enthält der Schnitt $E \cap \Phi$ eine weitere Gerade $\tilde{h}$, die notwendigerweise durch s_1 geht. Die Existenz von $\tilde{h}$ ist aber bereits durch die Betrachtung des ersten Falls widerlegt.
■

Die durch diesen Satz behandelten Flächen Φ werden im Paragraphen 3.6 im Zusammenhang mit der *Römerfläche von Steiner* und ihren Entartungstypen eine Rolle spielen. Für den Rest dieses Paragraphen wenden wir uns aber denjenigen Flächen Φ zu, für die es im linearen Büschel L (aus (3.6)) singularitätenfreie Quadriken gibt (diese bilden dann natürlich eine offene Menge in L). Wir werden zu ihrer Untersuchung zunächt das Koordinatensystem anpassen um eine Normaldarstellung der Fläche zu erreichen. Dies geschieht mit Hilfe des folgenden Satzes aus der lineare Algebra:

Satz 3.4.9. *Es sei A eine symmetrische $n \times n$-Matrix mit Komponenten aus dem algebraisch abgeschlossenen Körper k der Charakteristik Null. Mit I_t bezeichnen wir die $t \times t$-Matrizen, in der auf der Nebendiagonalen lediglich Einsen stehen, während alle anderen Einträge null sind ($I_t = (\delta_{i(t-j)})_{i,j=1,\ldots,t}$, Kroneckersymbol!). Dann gibt es eine Matrix T, die A auf* Jordansche Normalform *transformiert und für die zusätzlich*

$$T^*T = \begin{pmatrix} I_{t_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & I_{t_r} \end{pmatrix} =: I_{t_1 \dots t_r}$$

gilt, wobei die Zahlen $t_1, \dots, t_r$ *den Längen der 'Jordankästen' von* $T^{-1}AT$ *entspechen.*

Beweis. Für einen Untervektorraum $U \subset k^n$ sei $\widehat{U} := \{x \in k^n \mid u^*x = 0 \ \forall u \in U\}$ der Polarraum von U (bezüglich der Quadrik mit der Gleichung: $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0$). Es gilt zwar $\dim U + \dim \widehat{U} = n$, aber $U \cap \widehat{U} = \{0\}$ braucht im allgemeinen nicht zu gelten, da k algebraisch abgeschlossen ist. $H(\lambda)$ bezeichne den Hauptraum zum Eigenwert λ und $E(\lambda)$ den Eigenraum.
Behauptung 1: Für $\lambda \neq \mu$ gilt $\widehat{H(\lambda)} \supseteq H(\mu)$.
Sei $v \in H(\lambda)$ und $w \in H(\mu)$. Wir bezeichnen mit E die Einheitsmatrix und setzen $w_i := (A - \mu E)^{s-i} w$, wobei s so gewählt ist, daß $w_0 = 0$ und $w_1 \neq 0$ ist. Für hinreichend großes $r \geq 1$ erhält man unter Ausnutzung der Symmetrie von A:

$$0 = (A - \lambda E)^r v = v^*(A - \mu E + (\mu - \lambda)E)^r =$$
$$= v^*(\sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (A - \mu E)^j (\mu - \lambda)^{r-j} E) = 0.$$

Multipliziert man dies von rechts mit w_i, so ergibt sich:

$$\sum_{j=0}^{r} \binom{r}{j} (\mu - \lambda)^{r-j} v^* w_{i-j} = 0.$$

Daraus folgt für $r = i = 1, \dots, s$ sukzessive $v^* w_i = 0$.
Behauptung 2: Sei $W := < w_1, \dots, w_s >$ die lineare Hülle der w_i und $w_s^* w_1 = 1$. Dann gibt es Vektoren $w'_1, \dots, w'_s$ mit $W = < w'_1, \dots, w'_s >$ und

$$(w_i'^* w'_j)_{i,j=1,\dots,s} = I_s.$$

Es gilt $w_i^* w_j = ((A - \lambda E) w_{i+1})^* w_j = w_{i+1}^* (A - \lambda E) w_j = w_{i+1}^* w_{j-1}$ für $i < s$ und $j \geq 1$. Speziell für $i < s$ und $j = 1$ erhält man $w_i^* w_1 = 0$. Daher sind die Zahlen

$$\alpha_r := w_i^* w_j \text{ für } r := i+j \text{ wohldefiniert und insbesondere } \alpha_r = 0 \text{ für } r \leq s, \quad (*)$$

d.h. in der Matrix $(w_i^* w_j)_{i,j=1,\dots,s}$ haben die Nebendiagonalen konstante Werte. Die Bedingung $w'_i = (A - \lambda E)^{s-i} w'_s$ ergibt aus dem Ansatz $w'_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij} w_j$ die Beziehung $(A - \lambda E) w'_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij} w_{j-1} = \sum_{j=1}^{s-1} a_{i(j+1)} w_j = \sum_{j=1}^{s} a_{(i-1)j} w_j = w'_{i-1}$ also $a_{i(j+1)} = a_{(i-1)j}$ und $a_{(i-1)s} = 0$ für $i = 2, \dots, s$. Daher sind die Zahlen

$$d_r := a_{ij} \text{ für } r := i - j + 1 \text{ wohldefiniert, insbesondere } d_r = 0 \text{ für } r \leq 0. \quad (**)$$

Nun berechnen sich die Zahlen $b_i := w_s'^* w_i'$ zu

$$b_i = \sum_{k=1}^{s} \sum_{l=1}^{s} a_{sk} a_{il} w_k^* w_l = \sum_{k=1}^{s} \sum_{l=1}^{s} d_{s-k+1} d_{i-l+1} \alpha_{k+l}.$$

Hierin lassen sich wegen $l \leq i$ und $k + l \geq s + 1$ die Summen zu $b_i = \sum_{k=s-i+1}^{s} \sum_{l=s-k+1}^{i} d_{s-k+1} d_{i-l+1} \alpha_{k+l}$ verkürzen ($k + l \leq s \Rightarrow \alpha_{k+l} = 0$ und $l \geq i + 1 \Rightarrow d_{i-l+1} = 0$). In der Summe tritt die Zahl d_i nur für $k = s - i + 1$ ($\Rightarrow l = i$) und $l = 1$ ($\Rightarrow k = s$) auf. In beiden Fällen heißt der betreffende Summand $d_1 d_i \alpha_{s+1}$. Daran erkennt man

$$b_i = 2 d_1 d_i \alpha_{s+1} - c_i(d_1, \ldots, d_{i-1}) \qquad (***)$$

wobei c_i ein Polynom in den Unbestimmten $d_1, \ldots, d_{i-1}$ ist. Setzt man $d_1 := 1$, so kann man aus $(***)$ und der Bedingung $b_i = 0$ für $i = 2, \ldots, s$ die Zahlen $d_2, \ldots, d_s$ sukzessive berechnen, da $\alpha_{s+1} = w_s^* w_1 = 1$ nach Voraussetzung gilt. Für die so berechneten w_i' erhält man $w_s'^* w_1' = b_1 = d_1^2 \alpha_{s+1} = 1$ und $w_s'^* w_i' = b_i = 0$ für $i = 2, \ldots, s$. Wendet man nun $(*)$ auf die Vektoren w_i' an, so folgt Behauptung 2.
Nun können wir eine Basis aus Hauptvektoren $h_1, \ldots, h_n$ so konstruieren, daß mit $T = (h_1, \ldots, h_n)$ für T^*T die gewünschte Gestalt $I_{t_1 \ldots t_r}$ angenommen wird. Nach Behauptung 1 reicht es, die Konstruktion innerhalb eines Hauptraums etwa $H(\lambda_1)$ zu erläutern ($\lambda_1, \ldots, \lambda_q$ seien die Eigenwerte von A). Nun sei s_1 die minimale Zahl mit $H_1 := Ker(A - \lambda_1 E)^{s_1} = H(\lambda_1)$. Die Bilinearform $\beta_1(x, y) := x^*(A - \lambda_1 E)^{s_1 - 1} y$ ist nicht für alle Vektorpaare $x, y \in H_1$ Null, denn andernfalls wäre $\{0\} \neq (A - \lambda_1 E)^{s_1-1}(H_1) \subseteq \widehat{H_1} \cap H_1$. Dies kann aber nicht sein, denn nach Behauptung 1 gilt $\widehat{H_1} \supseteq \bigoplus_{i=2}^{q} H(\lambda_i)$, woraus wegen $\dim H_1 + \dim \widehat{H_1} = n$ und $k^n = \bigoplus_{i=1}^{q} H(\lambda_i)$ zunächst $\widehat{H_1} = \bigoplus_{i=2}^{q} H(\lambda_i)$ und daraus $k^n = H_1 \oplus \widehat{H_1}$ folgt. Demzufolge gibt es ein $w \in H_1$ mit $\beta_1(w, w) \neq 0$, da andernfalls β_1 auf H_1 identisch verschwinden müßte. Unter Verwendung der Bezeichnung $w_i = (A - \lambda_1 E)^{s_1 - i} w$ nehmen wir nun o.B.d.A. $w_{s_1}^* w_1 = 1$ an, so daß Behauptung 2 zufolge $h_1, \ldots, h_{s_1}$ existieren, für die $W_1 := \langle w_1, \ldots, w_{s_1} \rangle = \langle h_1, \ldots, h_{s_1} \rangle$ und $(h_i^* h_j)_{i,j=1,\ldots,s_1} = I_{s_1}$ gilt. Im Fall $W_1 = H_1$ ist man fertig. Im Fall $W_1 \neq H_1$ gilt $\widehat{W_1} \cap W_1 = \{0\}$, denn für $y = \varrho_1 h_1 + \ldots + \varrho_{s_1} h_{s_1} \in W_1$ mit $\varrho_1 \neq 0$ (o.B.d.A.) ist $y^* h_{s_1} = \varrho_1 \neq 0$ also $y \notin \widehat{W_1}$. Aus $\dim W_1 + \dim \widehat{W_1} = n$ folgt $k^n = \widehat{W_1} \oplus W_1$. Mit $H_2 := H_1 \cap \widehat{W_1} \neq \{0\}$ gilt $H_1 = W_1 \oplus H_2$. Nun sei s_2 minimal mit der Eigenschaft $H_2 \subseteq Ker(A - \lambda_1 E)^{s_2}$. Für $w \in H_2$ hat man $w_i := (A - \lambda_1 E)^{s_2 - i} w \in H_2$, denn es gilt $w_i^* h_j = w_{s_2}^* h_{j - s_2 + i} = 0$ für $i = 1, \ldots, s_2$ und $j = 1, \ldots, s_1$ also $w_i \in H_1 \cap \widehat{W_1}$. Nun sieht man analog wie oben, daß $H_2 \cap \widehat{H_2} = \{0\}$ wegen $k^n = W_1 \oplus H_2 \oplus H(\lambda_2) \oplus \ldots \oplus H(\lambda_q)$ und $\widehat{H_2} = W_1 \oplus H(\lambda_2) \oplus \ldots \oplus H(\lambda_q)$ gilt ($\widehat{H_2} \supseteq \bigoplus_{i=2}^{q} H(\lambda_i)$ wegen $\widehat{H_2} \supseteq \widehat{H_1}$, $\widehat{H_2} \supseteq W_1$ wegen $\widehat{W_1} \supseteq H_2$ und Gleichheit wegen $\dim H_2 + \dim \widehat{H_2} = n$). Daher gibt es wieder ein $w \in H_2$ mit $w_{s_2}^* w_1 = 1$ (s.o.) und man kann wiederum $h_{s_1+1}, \ldots, h_{s_1+s_2}$ gemäß Behauptung 2 wählen. Falls $\langle h_{s_1+1}, \ldots, h_{s_1+s_2} \rangle =: W_2 = H_2$ gilt,

ist man fertig. Andernfalls kann man das Verfahren wegen $\widehat{W_2} \cap W_2 = \{0\}$ fortführen. Da nun $(h_i^* h_j)_{i,j=s_l+1,\ldots,s_{l+1}} = I_{s_{l+1}}$ und $h_i^* h_j = 0$ für h_i, h_j aus verschiedenen Untervektorräumen W_k gilt, erhält man die gewünschte Gestalt von T^*T. ■

Ist nun eine Fläche $\Phi = Q_1 \cap Q_2 \subset \mathbb{P}^4$ vorgelegt und (o.B.d.A.) Q_1 singularitätenfrei, so kann man die Darstellungsmatrix A_1 von Q_1 mit Hilfe des *Sylvesterschen Trägheitssatzes* auf die Einheitsmatrix E transformieren: $E = S^* A_1 S$. Wählt man nun zu $S^* A_2 S$ die Transformations T gemäß Satz 3.4.9, so erhält man für Q_1 und Q_2, wenn man mit J die Jordannormalform von $S^* A_2 S$ bezeichnet, simultan folgende vereinfachte Darstellung:

$$\tilde{A}_1 := T^* S^* A_1 S T = T^* T = I_{t_1 \ldots t_r}$$

$$\tilde{A}_2 := T^* S^* A_2 S T = T^* T (T^{-1} S^* A_2 S T) = I_{t_1 \ldots t_r} J \tag{3.10}$$

Das soll heißen, daß man nach der Koordinatentransformation die Darstellungen $Q_i = V(x^* \tilde{A}_i x)$ für $i = 1, 2$ erhält. Die Anzahl $s \leq t_1 + \ldots + t_r = 5$ der Eigenwerte der Matrix $S^* A_2 S$ bzw. J entspricht der Anzahl der Kegel des linearen Büschels L (gemäß (3.6)). Die Eigenräume entsprechen den Spitzen dieser Kegel, die daher paarweise disjunkt sind. Gehören zu einem Eigenwert zwei 'Jordankästen' in J also zwei der Zahlen $t_1, \ldots t_r$ so bestimmt dieser einen Kegel zweiter Art aus L. Ein Eigenwert, der zu drei Jordankästen von J gehört, bestimmt ein reduzibles Element von L.

Satz 3.4.10. *Ist die Fläche Φ irreduzibel und von viertem Grad, dann besitzt keiner der Eigenwerte von $S^* A_2 S$ eine geometrische Vielfachheit von mehr als zwei.*

Beweis. Wie bereits bemerkt besitzt das Büschel L im Fall, daß ein Eigenwert mit größerer geometrischer Vielfachheit als zwei existiert, ein reduzibles Element, das sich aus ein oder zwei Hyperebenen zusammensetzt. Diese schneiden Q_1 (o.B.d.A. singularitätenfrei) in ein oder zwei quadratischen Flächen, aus denen somit Φ besteht. Daher ist Φ in diesem Fall reduzibel oder von zweitem Grad. ■

Nun kann man die Flächen Φ durch die sogenannten *Segre–Symbole* klassifizieren: Durch $[t_1 \ldots t_r]$ werden die Flächen bezeichnet, für die sich Q_1 und Q_2 simultan auf die Normalformen $Q_1 = V(x^* I_{t_1 \ldots t_r} x)$ und $Q_2 = V(x^* I_{t_1 \ldots t_r} J x)$ transformieren lassen. Gehören zwei Jordankästen (bzw. die entsprechenden Zahlen $t_i \in \{t_1, \ldots t_r\}$) zum selben Eigenwert, so werden diese beiden Zahlen in Klammern gesetzt, etwa: $[(t_1 t_2) t_3 t_4]$. Damit lassen sich folgende siebzehn Typen von Flächen Φ unterscheiden:

$$[11111], [(11)111], [(11)(11)1], [2111], [(21)11], [2(11)1]$$
$$[311], [(31)1], [3(11)], [41], [(41)], [5], [221], [(22)1]$$
$$[2(21)], [32], [(32)].$$

Nach dem zuvor Gesagten gibt die Anzahl der nicht in Klammern stehenden Ziffern die Zahl der Kegel erster Art im Büschel L an, während die Zahl der Klammerausdrücke im Segre–Symbol derjenigen der Kegel zweiter Art in L entspricht. Als Beispiel werden die Gleichungen einer Fläche vom Typ [32] angegeben:

$$\widetilde{A_1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \widetilde{A_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1^2 + 2x_0x_2 + 2x_3x_4 = 0 \quad \wedge \quad a(x_1^2 + 2x_0x_2) + 2bx_3x_4 + 2x_0x_1 + x_3^2 = 0.$$

Darin sind $a, b \in k$, $a \neq b$ die Eigenwerte der Matrix S^*AS. Die wohl bekannteste Fläche vierter Ordnung mit einer einparametrigen algebraischen Kegelschnittfamilie, nämlich der Torus, besitzt das Segre–Symbol $[(11)(11)1]$. Als nächstes untersuchen wir die Frage, wann Φ eine Regelfläche ist.

Satz 3.4.11. *Die Fläche Φ ist genau dann eine Regelfläche, wenn Φ vom Typ $[(22)1]$ oder $[(32)]$ ist.*

Beweis. $' \Longrightarrow '$
Zunächst ist Φ kein Kegel. Denn betrachtet man andernfalls als Projektionszentrum ein $y \notin \Phi$, welches auf keinem der Kegel aus L liegt, so enthält die Fläche $\pi_y(\Phi)$ als Doppelpunktskurve einen Kegelschnitt Y (Korollar 3.4.3), was aber unmöglich ist, da andererseits $\pi_y(\Phi)$ zufolge Satz 3.4.5 ein irreduzibler Kegel vierter Ordnung sein muß (ein solcher enthält überhaupt keine Kegelschnitte). Wir zeigen nun, daß im Fall des Typs [11111] keine Regelfläche vorliegt. Dazu betrachten wir einem der fünf Kegel aus L, etwa Q. Für Q erhält man im Koordinatensystem der Normaldarstellung von Φ die Gleichung

$$(a_1 - a_0)x_1^2 + (a_2 - a_0)x_2^2 + (a_3 - a_0)x_3^2 + (a_4 - a_0)x_4^2 = 0,$$

worin $a_0, \ldots, a_4$ die fünf verschiedenen Eigenwerte sind, während Q_1 die Gleichung $x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 = 0$ besitzt. Die Ebenen $E_1 = V(\{x_1-\alpha x_2, x_3-\beta x_4\})$ und $E_2 = V(\{x_1 - \alpha x_2, x_3 + \beta x_4\})$ mit $\alpha := i\sqrt{\frac{a_2-a_0}{a_1-a_0}}$ und $\beta := i\sqrt{\frac{a_4-a_0}{a_3-a_0}}$ liegen auf Q und gehören je einem der beiden linearen Systemen von Ebenen auf Q an, da sie sich in der Geraden $V(\{x_1 - \alpha x_2, x_3 - \beta x_4, x_3 + \beta x_4\})$ schneiden. Substituiert man nun die Gleichungen von E_i $(i = 1, 2)$ in diejenige von Q_1, so ergibt sich mit der Quadrik $Q_3 := V(x_0^2 + (1 - \frac{a_2-a_0}{a_1-a_0})x_2^2 + (1 - \frac{a_4-a_0}{a_3-a_0})x_4^2)$ die Identität $E_i \cap Q_1 = E_i \cap Q_3$. Nun sieht man aber leicht, daß Q_3 ein irreduzibler Kegel ist, dessen Spitze $s := V(\{x_0, x_2, x_4\})$ offensichtlich windschief zu den Ebenen E_1 und E_2 ist. Daher ist für $i = 1, 2$ der Schnitt $Q_1 \cap E_i$ singularitätenfrei. Die Ebenen E_1 und E_2 spannen eine Hyperebene V auf. Man kann in V einen Projektionspunkt $y \notin \Phi$ so wählen, daß die beiden Kegelschnitte $E_1 \cap \Phi$ und $E_2 \cap \Phi$ auf zwei verschiedene Kegelschnitte der Bildfläche $F = \pi_y(\Phi)$ abgebildet werden, die dann beide in derselben Ebene $H \cap V$ (H ist die Projektionshyperebene) liegen. Nach Korollar 2.5.2 kann dann F keine Regelfläche sein und nach Satz 3.4.6 auch nicht Φ.

Nun werden alle von [11111] verschiedenen Typen behandelt. Dazu wird vorab bemerkt, daß die Spitze eines Kegels erster Art genau dann auf Φ liegt, wenn die zu ihm gehörige Untermatrix I_{t_i} von $\tilde{A}_1 = I_{t_1 \ldots t_r}$ (siehe (3.10)) in der linken oberen Ecke eine Null besitzt, also genau dann, wenn die dem Kegel entsprechende Zahl t_i größer als eins ist. Denn die Spitze ist gerade derjenige Einheitsvektor, der an der k-ten Stelle eine Eins hat, wobei k die Zeilen- und Spaltenzahl der linken oberen Ecke von I_{t_i} in $I_{t_1 \ldots t_r}$ ist. Analog liegt die Spitze eines Kegels zweiter Art genau dann auf Φ, wenn die zu ihm gehörigen Zahlen t_i und t_j beide größer als eins sind.

Nun gibt es stets einen Kegel Q in L, so daß seine Spitze s die Fläche Φ schneidet oder sogar auf ihr liegt. Denn falls nicht alle Zahlen t_i eins sind, folgt dies aus obiger Bemerkung. In den beiden übrigen Fällen gibt es einen Kegel zweiter Art in L, dessen Spitze bestimmt Q_1, also auch Φ, schneidet.

Wir zeigen nun, daß im Fall einer Regelfläche Φ sogar ein Kegel zweiter Art, dessen Spitze s in Φ enthalten ist, in L existieren muß, woraus mit obiger Bemerkung sofort die Zugehörigkeit von Φ zu einem der beiden Typen [(22)1] oder [(32)] folgt. Wir nehmen das Gegenteil an. Für den Kegel mit $s \cap \Phi \neq \emptyset$ ist dann $s \cap \Phi$ nulldimensional. Da Φ selbst kein Kegel ist, gehen nur endlich viele Geraden durch die endlich vielen Punkte aus $s \cap \Phi$. Nun schneidet aber jede nicht durch $s \cap \Phi$ gehende Gerade $g \subset \Phi$ eine dieser endlich vielen Geraden, denn für $x \in s \cap \Phi$ schneidet die Verbindungsebene E von x und g die Fläche Φ in g sowie einer weiteren Gerade durch x (beachte $E \subset Q$ und Satz 3.4.4). Daher muß es ein $x \in s \cap \Phi$ und eine Gerade $h \subset \Phi$, welche x enthält und von unendlich vielen auf Φ gelegenen Geraden geschnitten wird, geben. Nach Satz 3.4.4 gibt es dann aber einen Kegel in L, der unendlich viele Ebenen durch h enthält und dies kann nur ein Kegel zweiter Art mit Spitze $h \subset \Phi$ sein, dessen Existenz wir in unserer Annahme aber gerade verneint hatten.

'$\Longleftarrow$'

Diese Richtung der Aussage folgt sofort, wenn man für den Kegel zweiter Art aus dem Büschel L, dessen Doppelpunktsgerade (Spitze s) notwendigerweise auf Φ liegt, die Schnitte seiner Ebenen, welche s stets enthalten, mit Φ betrachtet. ■

3.5 Quartiken mit einem Doppelkegelschnitt

Mit Hilfe der Sätze des letzten Paragraphen ist es nun möglich, Dimension und Zahl der irreduziblen Komponenten der Chow–Varietät $C_{1,2}(F)^{irr}$ für eine Quartik der Typen (b) und (c) (gemäß Paragraph 3.2), deren singulärer Ort also einen Kegelschnitt $\bar{C}_2$ enthält, zu bestimmen.

Wählt man das Koordinatensystem im $\mathbb{P}^3$ so, daß die Grundpunkte A_0 und A_2 auf $\bar{C}_2$ liegen, A_1 der Pol der Verbindungsgerade von A_0 und A_2 bezüglich $\bar{C}_2$ ist und sich A_3 außerhalb der Trägerebene von $\bar{C}_2$ befindet, so erhält man bei geeigneter Normierung des Koordinatensystems $\bar{C}_2 = V(\{x_3, x_1^2 + 2x_0x_2\})$. Darüberhinaus gilt sogar $I(\bar{C}_2) = (x_3, x_1^2 + 2x_0x_2)$. Denn für $f \in I(\bar{C}_2)$ muß $f(x_0, x_1, x_2, 0)$ von $x_1^2 + 2x_0x_2$ geteilt werden (homogene Ideale irreduzibler ebener Kurven sind stets Hauptideale in $k[x_0, x_1, x_2]$, die von irreduziblen Polynomen erzeugt werden). Also erhält man $f = x_3u + (x_1^2 + 2x_0x_2)v$ mit $u, v \in k[x_0, \ldots, x_3]$. Für das irreduzible Polynom f, dessen Nullstellenmenge F ist, ergibt sich wegen $\bar{C}_2 \subset F$ zunächst der Ansatz $f = (x_1^2 + 2x_0x_2)v_2 + x_3v_3$ mit homogenen $v_2, v_3 \in k[x_0, \ldots, x_3]$ der respektiven Grade zwei und drei. Betrachtet man die Ableitungen von f nach x_0, x_1 sowie x_2, so folgt wegen $\bar{C}_2 \subset \operatorname{Sing} F$ weiterhin $v_2 \in I(\bar{C}_2)$ also $v_2 = x_1^2 + 2x_0x_2 + x_3v_1$ und daher $f = (x_1^2 + 2x_0x_2)^2 + x_3u_3$ mit einem $u_3 \in k[x_0, \ldots, x_3]$ von drittem Grad. Die Betrachtung der Ableitung von f nach x_3 lehrt nun $u_3 \in I(\bar{C}_2)$. Daher gibt es $u_1, u_2 \in k[x_0, \ldots, x_3]$ mit $f = (x_1^2 + 2x_0x_2)^2 - 4x_3((x_1^2 + 2x_0x_2)u_1 + x_3u_2)$ und man erhält

$$f = (x_1^2 + 2x_0x_2 - 2x_3u_1)^2 - 4x_3^2(u_2 + u_1^2). \tag{3.11}$$

Nun folgt aus Satz 3.4.1, daß es eine Fläche $\Phi = Q_1 \cap Q_2$ als Durchschnitt zweier Quadriken des $\mathbb{P}^4$ und ein $y \in \mathbb{P}^4 \backslash \Phi$ gibt, so daß die Projektion $\pi_y(\Phi)$ von Φ mit Projektionszentrum y auf eine y nicht enthaltende Hyperebene, welche man mit $\mathbb{P}^3$ identifizieren kann, gerade F ergibt. Die Quadrik Q aus dem von Q_1 und Q_2 aufgespannten linearen Büschel L, die den Punkt y enthält ist Korollar 3.4.3 zufolge wegen $Y = \bar{C}_2$ singularitätenfrei. Daher kann man auf die Fläche Φ die Sätze 3.4.9 bis 3.4.11 anwenden. Zusammen mit den Sätzen 3.4.4 bis 3.4.7 erkennt man, daß ein von $\bar{C}_2$ verschiedener Kegelschnitt C_2 auf F einem von höchstens zehn linearen Systemen von Kurven auf F angehört, welches auf einer nichtleeren offenen Teilmenge von Parameterwerten Kegelschnitte enthält (da $C_{1,2}(F)^{irr}$ offen in $C_{1,2}(F)$). Die Trägerebenen dieser Kegelschnitte durchlaufen entweder ein lineares Büschel von Ebenen, oder hüllen einen *Kummerschen Kegel* von F ein (Satz 3.4.7). Weiterhin ist F genau dann eine Regelfläche, wenn dies für Φ zutrifft (Satz 3.4.6). In diesem Fall ist Φ durch die Segre–Symbole [(22)1] oder [(32)] charakterisiert (Satz 3.4.11) und $\operatorname{Sing} F$ enthält neben $\bar{C}_2$ eine Gerade $\bar{g}$, welche das Bild der in Φ enthaltenen Spitze des Kegels zweiter Art aus L ist. Nimmt man nämlich letzteren o.B.d.A. als $Q_2 = V(f_2)$ an, so erkennt man bei einer Betrachtung der Ableitungen von g in Gleichung (3.9), daß alle Punkte aus $\operatorname{Sing} Q_2$ auf singuläre Punkte von $F = V(g(x_0, x_1, x_2, x_3, 0))$ abgebildet werden. Daher gehört jede Regelfläche mit einem Doppelkegelschnitt $\bar{C}_2$ automatisch zum Typ (c). Umgekehrt erkennt man, daß jede Fläche vom Typ (c) eine Regelfläche ist. Dazu betrachtet man die Schnitte von F mit Ebenen durch die Doppelgerade $\bar{g}$ von F und beachte, daß die Schnittkurven stets eine Singularität außerhalb von $\bar{g}$ besitzen, nämlich den Schnittpunkt mit $\bar{C}_2$. Da somit die Flächen vom Typ (b) keine Regelflächen sind, enthalten die gemäß Satz 3.4.7 existierenden linearen Kurvensysteme auf F stets für eine nichtleere offene Teilmenge der Parametervarietät Kegelschnitte. Diese liefern also irreduzible algebraische Familien von Kegelschnitten auf F. Damit erhält man:

Satz 3.5.1. *Die Quartiken F vom Typ (b) sind keine Regelflächen. Die Chow–Varietäten $C_{1,2}(F)^{irr}$ zerfallen in einen isolierten Punkt, welchem der Doppelkegelschnitt $\bar{C}_2$ entspricht, und ein bis acht oder zehn eindimensionale irreduzible Komponenten, die entsprechend viele einparametrige algebraische Familien von Kegelschnitten auf F liefern. Die Varietäten $T^\vee \subset \mathbb{P}^3$ der Trägerebenen zu diesen Familien (gemäß Satz 2.6.3) sind entweder offene Teilmengen von Geraden oder von Kegelschnitten des ${\mathbb{P}^3}^\vee$. In ersterem Fall schneiden die Trägerebenen Kegelschnittpaare derselben Familie aus F aus, während sie im zweiten Fall einen quadratischen Kegel (*Kummerschen Kegel*) des $\mathbb{P}^3$ einhüllen und aus F je zwei Kegelschnitte, welche zu zwei verschiedenen Familien gehören, ausschneiden.*

Die Quartiken vom Typ (b) lassen sich unter dem Gesichtspunkt der Kegelschnittfamilien in folgende zehn Typen einteilen:

(b1)	1	0	[(41)]
(b2)	2	1	[5]
(b3)	3	1	[(31)1], [3(11)], [2(21)]
(b4)	4	1	[1(11)(11)]
(b5)	4	2	[41], [32]
(b6)	5	2	[(21)11], [2(11)1]
(b7)	6	3	[311], [221]
(b8)	7	3	[(11)111]
(b9)	8	4	[2111]
(b10)	10	5	[11111]

Tabelle 1
Erste Spalte: Typ-Bezeichnung
Zweite Spalte: Anzahl der Kegelschnittfamilien
Dritte Spalte: Anzahl der Kummerschen Kegel
Vierte Spalte: Segre–Symbol der zugehörigen Flächen Φ

Es muß darauf hingewiesen werden, daß diese Unterteilung der Quartiken vom

Typ (b) nur sehr grob ist. Etwas detaillierter wird anhand der Charakteristika der Singularitäten dieser Flächen in den entsprechenden Tabellen in [18, S.440-444] oder [12, S.82-85] vorgegangen.

Satz 3.5.2. *Die Quartiken F vom Typ (c) sind stests Regelflächen. Sie können in zwei Untertypen (c1) und (c2) unterschieden werden. Die Flächen des ersten Typs enthalten nur den einen Kegelschnitt $\bar{C}_2$, während für die zum zweiten Typen gehörigen die Chow–Varität $C_{1,2}(F)^{irr}$ neben dem $\bar{C}_2$ entsprechenden Punkt genau eine irreduzible Komponente der Dimension eins besitzt. Die Trägerebenen der Kegelschnitte dieser Familie sind Tangentialebenen eines* Kummerschen Kegels.

Beweis. Die Quartiken F sind Regelflächen, da alle ebenen Schnitte mit Ebenen aus $\bar{g}^\vee$ ($\bar{g} =$ Doppelgerade von F) voll in Geraden zerfallen (s.o). Die Flächen vom Typ (c1) sind genau diejenigen, für die Φ vom Segre–Typ [(32)] ist. Man sieht sofort, daß Φ keine Kegelschnitte besitzt, wenn man Satz 3.4.4 und die Tatsache beachtet, daß alle Ebenen des einzigen Kegels aus L, welcher von zweiter Art ist und dessen Spitze in Φ und all diesen Ebenen enthalten ist, nur Geraden aus Φ ausschneiden. Nach Satz 3.4.6 enthält F nur den einen Kegelschnitt $\bar{C}_2 = Y$ (Korollar 3.4.3). Die Flächen vom Typ (c2) sind diejenigen, für die Φ das Segre–Symbol [(22)1] besitzt. Auch hier schneiden die Ebenen des Kegels zweiter Art aus L nur Geraden von Φ aus. Wir zeigen nun, daß genau eines der beiden linearen Systemen von Ebenen des Kegels erster Art aus L Kegelschnitte von Φ liefert, woraus dann mit Hilfe der Sätze 3.4.4 bis 3.4.7 die Behauptung folgt. Sei nun Q_1 der Kegel erster Art aus L und Q_2 derjenige zweiter Art mit den Spitzen s_1 und s_2. Es gilt $s_1 \not\in s_2$ (siehe Abhandlung im Anschluß an Satz 3.4.9) und $s_2 \subset \Phi \subset Q_1$. Sei $E \subset Q_1$ die Verbindungsebene von s_1 und s_2. Alle Ebenen, die mit E im gleichen System von Ebenen auf Q_1 liegen, schneiden E in s_1 also schneiden sie s_2 nicht. Da aber alle Geraden von Q_2 die Spitze s_2 schneiden, liefern die Schnitte dieser Ebenen mit Φ sicher Kegelschnitte (mit Ausnahme von E selbst). Denn würden sie in Geraden zerfallen, so müßten dies ja Geraden von Q_2 sein. Die Ebenen des anderen Systems aber schneiden s_2 stets, da sie E in Geraden schneiden, und damit Φ in Kurven mit einer Singularität. Diese können aber keine Kegelschnitte sein. ∎

3.6 Die Steinersche Römerfläche und ihre Entartungstypen

Bevor die Quartiken vom Typ (d) behandelt werden, betrachten wir den Typ (e). Der folgende Satz zeigt, daß hier alle Flächen zueinander projektiv äquivalent sind. Es handelt sich um die sogenannte *Römerfläche von Steiner*.

Satz 3.6.1. *Sei F eine (von einem Kegel verschiedene) Quartik mit drei kopunktalen aber nicht koplanaren Doppelgeraden $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3$. Dann läßt sich die Gleichung von F auf die Form*

$$f = x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 - 2x_0x_1x_2x_3 = 0 \tag{3.12}$$

transformieren.

Beweis. Mit $A_0, \dots, A_3$ bezeichnen wir wieder die Grundpunkte des Koordinatensystems. Zunächst wählt man $A_0 = \bar{g}_1 \cap \bar{g}_2 \cap \bar{g}_3$ und $A_i \in \bar{g}_i \backslash \{A_0\}$ für $i = 1, 2, 3$. Nun gilt für die homogenen Ideale der drei Geradenpaare $I(\bar{g}_1 \cup \bar{g}_2) = (x_3, x_1x_2)$, $I(\bar{g}_1 \cup \bar{g}_3) = (x_2, x_1x_3)$ und $I(\bar{g}_2 \cup \bar{g}_3) = (x_1, x_2x_3)$ (vgl. die Basisdarstellung von $I(\bar{C}_2)$ im vorigen Paragraphen). Analog zur Begründung von Gleichung (3.11) (mit $I(\bar{g}_2 \cup \bar{g}_3)$ anstelle von $I(\bar{C}_2)$) erhält man zunächst als Gleichung von F

$$f = x_1^2u_2 + x_1x_2x_3u_1 + cx_2^2x_3^2 = 0$$

mit homogenen $u_1, u_2 \in k[x_0, \dots, x_3]$ vom Grad eins bzw. zwei und $c \in k$. Die Wahl der Koordinatengrundpunkte bedingt $u_2(x_0, x_1, 0, x_3) = bx_3^2$ (wegen $F \cap V(x_2) = \bar{g}_1 \cup \bar{g}_3$) und $u_2(x_0, x_1, x_2, 0) = ax_2^2$ (wegen $F \cap V(x_3) = \bar{g}_1 \cup \bar{g}_2$) mit $a, b \in k$ also $u_2 = ax_2^2 + dx_2x_3 + bx_3^2$. Deswegen hat f tatsächlich die Gestalt

$$f = ax_1^2x_2^2 + bx_1^2x_3^2 + cx_2^2x_3^2 + x_1x_2x_3(\alpha x_0 + \beta x_1 + \gamma x_2 + \delta x_3).$$

Da F kein Kegel ist, muß $\alpha \neq 0$ sein und man kann A_1, A_2, A_3 längs der Geraden $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3$ in die Ebene $E := V(\alpha x_0 + \beta x_1 + \gamma x_2 + \delta x_3)$ verlegen. Nach dieser Transformation hat F die Gleichung

$$f = ax_1^2x_2^2 + bx_1^2x_3^2 + cx_2^2x_3^2 + dx_0x_1x_2x_3 = 0.$$

Nun soll f irreduzibel sein und daher ist notwendigerweise $a \neq 0, b \neq 0$ und $c \neq 0$. Sind dann λ, μ, ν vierte Wurzeln von a, b und c, so erhält man nach Ausführung der Transformation $x_0' = -\frac{d}{2\lambda\mu\nu}x_0$; $x_1' = \frac{\lambda\mu}{\nu}x_1$; $x_2' = \frac{\lambda\nu}{\mu}x_2$; $x_3' = \frac{\mu\nu}{\lambda}x_3$ die gewünschte Gleichung (3.12) ■

Die Irreduzibilität des Polynoms f aus Gleichung (3.12) folgt daraus, daß f als Polynom in x_0 über dem Ring $k[x_1, x_2, x_3]$ linear ist. Nun sind $x_1x_2x_3$ und $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$ zueinander teilerfremd, so daß in einer Darstellung $f = f_1f_2$ $f_1 \in k$ oder $f_2 \in k$ folgt. Also ist f irreduzibel.

Satz 3.6.2. *Für die Römerfläche F ist die Chow–Varietät $C_{1,2}(F)^{irr}$ irreduzibel und zweidimensional. Die auf F gelegenen Kegelschnitte gehören zu einem zweidimensionalen linearen System von Kurven, unter denen auch die drei Doppelgeraden von F vorkommen, welche die einzigen Geraden auf F sind.*

Beweis. Wir fangen mit der letzten Behauptung an. Die nach Satz 3.4.1 zu F existierende Fläche $\Phi \subset \mathbb{P}^4$ erhält man als Schnitt der beiden Quadriken Q_1 und Q_2 mit den Gleichungen $f_1 = 2x_1x_2 + 2x_3x_4 = 0$ und $f_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_4^2 + 2x_0x_4 = 0$ (verwende Gleichung (3.9) mit $y = (0,0,0,0,1)$). Daraus berechnet man, daß alle Elemente des von Q_1 und Q_2 aufgespannten linearen Büschels L Kegel sind, weshalb nach den Sätzen 3.4.6 und 3.4.8 die drei Doppelgeraden die einzigen Geraden von F sind (Φ enthält nur eine Gerade). Durch die Polynome $ax_1x_2 + bx_1x_3 + cx_2x_3$ mit $a, b, c \in k$ ist das *lineare Netz* N von quadratischen Kegeln mit Spitze A_0 (zweidimensionaler linearer Unterraum von $\mathbb{P}^{\nu_{3,2}}$, dessen Punkte Divisoren zweiten Grades des $\mathbb{P}^3$ entsprechen) gegeben, dessen sämtliche Elemente durch die drei Doppelgeraden von F gehen. Sei $\{C_n \mid n \in N\}$ das hierdurch definierte lineare System von Kurven auf F, ohne die festen Bestandteile $\bar{g}_1, \bar{g}_2$ und $\bar{g}_3$ (siehe Paragraph 2.3). Nach Bemerkung 2.1.6 sind die Kurven C_n von höchstens zweitem Grad ($\bar{g}_1, \bar{g}_2$ und $\bar{g}_3$ zählen im Schnitt doppelt). Nach der schon bewiesenen letzten Behauptung des Satzes kann es sich bei diesen nur um Kegelschnitte oder um eine aus ein oder zwei der Geraden $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3$ zusammengesetzte Kurve handeln. Andererseits geht jeder auf F gelegene Kegelschnitt C_2 durch alle drei Doppelgeraden, falls seine Trägerebene E eine solche nicht enthält. Denn E schneidet F notwendigerweise in zwei Kegelschnitten, und diese müssen sich, da sie selbst singularitätenfrei sind, in den (auf E gelegenen) Punkten der drei Doppelgeraden schneiden. Daher kommt auch der quadratische Kegel mit Spitze A_0, welcher C_2 enthält, unter den Kegeln des Netzes vor. Falls die Trägerebene des Kegelschnittes eine der Doppelgeraden enthält, kommt das Paar von Ebenen, dessen eines Element die Trägerebene, das andere hingegen die Verbindungsebene der beiden anderen Doppelgeraden ist, unter den Elementen des Netzes vor. Daher gehören alle Kegelschnitte auf F zum linearen System $\{C_n \mid n \in N\}$. Die Behauptung des Satzes folgt nun aus einer Betrachtung der Abbildung $\delta : N \to C_{1,2}(F)$ aus Satz 2.2.2. Denn ein Kegelschnitt auf F wird von genau einem Kegel aus N ausgeschnitten, so daß δ einelementige Fasern besitzt. Nach Satz 1.2.2 ist $\delta(N)$ zweidimensional und nach Satz 1.2.1 abgeschlossen und irreduzibel. Nun gilt $\emptyset \neq C_{1,2}(F)^{irr} \subseteq \delta(N)$, und da $C_{1,2}(F)^{irr}$ offen in $C_{1,2}(F)$ also auch in $\delta(N)$ ist, folgt, daß $C_{1,2}(F)^{irr}$ dicht in $\delta(N)$, also ebenfalls irreduzibel und zweidimensional ist (alle offenen Teilmengen einer irreduziblen Varietät sind dicht). ∎

Satz 3.6.3. *Die zu einer Römerfläche gemäß Satz 3.4.1 existierende Fläche $\Phi \subset \mathbb{P}^4$ ist bis auf projektive Äquivalenz eindeutig bestimmt.*

Beweis. Zunächst müssen alle Quadriken des zu Φ gehörigen Büschels L Kegel sein, da andernfall den Sätzen 3.4.4, 3.4.6 und 3.4.7 zufolge $C_{1,2}(F)^{irr}$ im Widerspruch zu Satz 3.6.2 nur eindimensional wäre (zu den endlich vielen Kegeln aus L gibt es dann nur endlich viele einparametrige Kegelschnittfamilien). Wegen Satz 3.4.8 besitzt Φ nur eine einzige Gerade, so daß nach Satz 3.4.6 Y

(aus Korollar 3.4.3) aus zwei der Doppelgeraden $\bar{g_1}, \bar{g_2}$ und $\bar{g_3}$ bestehen muß. In Gleichung (3.9) ist daher die Form $g_1(x, y)$ proportional zu x_1, x_2 oder x_3. Da sich bei einer Permutation der Koordinatengrundpunkte A_1, A_2 und A_3 Gleichung (3.12) nicht ändert, folgt die Behauptung des Satzes aus Bemerkung 3.4.2. ■

Nun sieht man auch umgekehrt, daß das Bild $\pi_y(\Phi)$ einer derartigen Fläche Φ (gemäß Satz 3.4.8) eine Römerfläche von Steiner ist, sofern nur y auf einem Kegel Q_1 erster Art aus L gewählt wird, der die Verbindungsebene von y mit der einzigen Gerade g auf Φ nicht enthält. Denn die Punkte von g werden auf singuläre Punkte von F abgebildet, also $\pi_y(g) \subset \operatorname{Sing} F$. Dazu betrachte man $x \in g$ o.B.d.A. als Spitze des Kegels $Q_2 = V(f_2)$ und beachte, daß alle Ableitungen der Form g aus Gleichung (3.9) für x verschwinden (vgl. Begründung von Satz 3.5.1). Nun gilt $\pi_y(g) \not\subset Y$ (Bez. gemäß Korollar 3.4.3), denn andernfalls wäre die Verbindungsgerade von y und g in Q_1 enthalten. Die Gerade g schneidet die beiden Ebenen von Q_1, in denen y liegt, in der Spitze von Q_1 (diese liegt nach Satz 3.4.8 auf g). Also besitzt F mit $\pi_y(g)$ und den beiden Geraden aus Y nach Korollar 3.4.3 drei kopunktale Doppelgeraden und ist laut Satz 3.6.1 eine Römerfläche, denn mit nur drei Geraden kann F kein Kegel sein.

Dieser Sachverhalt hilft uns, diejenigen Flächen Φ aus Paragraph 3.4 in den Griff zu bekommen, welche nicht durch Segre–Symbole zu charakterisieren sind. Diese sind nun nämlich des Satzes 3.6.3 zufolge alle zueinander projektiv äquivalent. Man kann die im Beweis von Satz 3.6.2 angegebenen Gleichungen von Q_1 und Q_2 als Normaldarstellung von Φ verwenden.

Es entsteht nun die Frage ob es neben der Römerfläche weitere Quartiken gibt, die als Projektion dieser Fläche Φ auftreten, und daher ebenso eine zweiparametrige Familie von Kegelschnitten besitzen. Im folgenden wird gezeigt, daß es bis auf projektive Äquivalenz noch genau zwei solche Quartiken gibt. Dabei werden auch deren Gleichungen ermittelt. Zunächst sei dazu bemerkt, daß das Büschel L genau zwei Kegel zweiter Art enthält, deren Gleichungen $f_1 + f_2 = 0$ beziehungsweise $f_1 - f_2 = 0$ sind und die wir mit Q_3 und Q_4 bezeichnen. Dabei sind $f_1 = 2x_1x_2 + 2x_3x_4$ und $f_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_4^2 + 2x_0x_4$ die Polynome aus dem Beweis von Satz 3.6.2 mit $Q_1 = V(f_1)$ und $Q_2 = V(f_2)$. Sei G die Verbindungsebene des Projektionszentrums y mit der einzigen Gerade g auf Φ. Für das Projektionszentrum y bleiben noch folgende spezielle Lagen zu berücksichtigen:

(i) G ist in Q_1 enthalten.

(ii) Es ist zwar y nicht aber G in Q_3 enthalten.

(iii) G ist in Q_3 enthalten.

Die Beschränkung auf die Quadriken Q_1 und Q_3 verletzt nicht die Allgemeinheit der Betrachtung. Die Flächen $F = \pi_y(\Phi)$ nach Fall (i) und (ii) besitzen als Doppelpunktskurve ein paar schneidender Geraden, gehören also zum Typ (f) der Einteilung aus Paragraph 3.2, während im Fall (iii) nur eine Doppelgerade vorhanden ist, so daß diese Flächen zum Typ (h) gehören.

Satz 3.6.4. *Die Quartiken $F = \pi_y(\Phi)$ für die y wie unter (i) oder (ii) gewählt ist, sind projektiv äquivalent zur Quartik mit der Gleichung*

$$x_1^4 + 2x_0x_2x_1^2 + x_2^2x_3^2 = 0 \tag{3.13}$$

Beweis. Behauptung: Zu einer der beiden Doppelgeraden $\bar{g}_1$ und $\bar{g}_2$ von F (o.B.d.A. sei dies $\bar{g}_1$) gibt es eine Ebene E die längs dieser die Fläche doppelt berührt, d.h. $(E \cap F)^{div} = 4\bar{g}_1$.
Beweis der Behauptung im Fall (i): Da g die Spitze von Q_1 enthält, gibt es eine von G verschiedene Ebene $G' \subset Q_1$, welche g enthält. G und G' werden von der längs g berührenden Hyperebene aus Q_1 ausgeschnitten. Nun ist nach Satz 3.4.4 $G' \cap \Phi = g$, da g die einzige Gerade auf Φ ist (Satz 3.4.8). Also erfüllt $E := \pi_y(G')$ die Bedingung der Behauptung wegen $\pi_y(G' \cap \Phi) = \bar{g}_1 = \pi_y(g)$.
Beweis der Behauptung im Fall (ii): Die Ebene $E := T_yQ_3 \cap H$ (H = Projektionshyperebene) schneidet F offenbar nur in der Geraden $\bar{g}_1 = Y$ (siehe Korollar 3.4.3), weshalb man sofort fertig ist.
Nun wählt man als Koordinatengrundpunkte $A_0 := \bar{g}_1 \cap \bar{g}_2$, $A_3 \in \bar{g}_1 \backslash \bar{g}_2$ und $A_1 \in E \backslash \bar{g}_1$. Die Verbindungsebene von A_1 und $\bar{g}_2$ schneidet F in $\bar{g}_2$ und einem Kegelschnitt C_2 ($\bar{g}_1$ und $\bar{g}_2$ sind die einzigen Geraden auf F!), der E in A_0 berührt (nach der Behauptung). Daher kann man o.B.d.A. A_1 als Pol der Gerade $\bar{g}_2$ bezüglich C_2 annehmen. Wähle nun A_2 als den von A_0 verschiedenen Schnittpunkt zwischen C_2 und $\bar{g}_2$. Bei geeigneter Normierung des Koordinatensystems ergibt sich daraus für das homogene Polynom f, dessen Nullstellenmenge F ist, $f(x_0, 0, x_2, x_3) = x_2^2x_3^2$ (wegen $V(x_1) \cap F = \bar{g}_1 \cup \bar{g}_2$), $f(x_0, x_1, 0, x_3) = x_1^4$ (wegen $V(x_2) = E$) und $f(x_0, x_1, x_2, 0) = \lambda x_1^2(x_1^2 + 2x_0x_2)$ (wegen $V(x_3) \cap F = \bar{g}_2 \cup C_2$). Folglich erhält man $\lambda = 1$ und als Gleichung für F:

$$f = x_1^4 + 2x_0x_2x_1^2 + 2x_1x_2x_3(ax_0 + bx_1 + cx_2 + dx_3) + x_2^2x_3^2 = 0$$

mit $a, b, c, d \in k$. Für eine Urbildfläche Φ gemäß Satz 3.4.1 von F findet man etwa $f_1 = 2x_2x_3 + 2x_1x_4 = 0$ und $f_2 = x_1^2 + 2x_0x_2 - 2x_4(ax_0 + bx_1 + cx_2 + dx_3) + x_4^2 = 0$ als Gleichungen (siehe (3.9) mit $y = (0, 0, 0, 0, 1)$). Die Bedingung, daß $f_2 = 0$ die Gleichnung eines Kegels ist, liefert aus der Determinante der Darstellungsmatrix sofort $d = 0$. Wenn man nun weiterhin ausnützt, daß alle Elemente des von f_1 und f_2 aufgespannten linearen Büschels L Kegel darstellen, so liefert die Berechnung der entsprechenden Determinante $a = 0$. Schließlich führt man die Koordinantentransformation $x_0 = x_0' + \frac{c^2}{2}x_2' + b(cx_1' - x_3')$, $x_1 = x_1'$, $x_2 = x_2'$ und

$x_3 = x'_3 - cx'_1$ durch (die gestrichenen sind die neuen Koordinaten!), was unmittelbar in Gleichung (3.13) resultiert (beachte, daß die Transformationsmatrix für alle $b, c \in k$ tatsächlich regulär ist). ■

Satz 3.6.5. *Die Quartiken $F = \pi_y(\Phi)$ für die y wie unter (iii) gewählt ist, sind projektiv äquivalent zur Quartik mit der Gleichung*

$$f = (x_1^2 + 2x_2x_3)^2 + x_2^3x_0 = 0 \tag{3.14}$$

Beweis. Sei G die Ebene von Q_3, welche die (einzige) Gerade $g \subset \Phi$ enthält. Wir führen die Projektion für einen Punkt $y \in G\backslash\Phi$ durch. Die Gleichungen der Quadriken Q_1 und Q_2 seien wieder $f_1 = 2x_1x_2 + 2x_3x_4 = 0$ und $f_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_4^2 + 2x_0x_4 = 0$ (siehe Beweis von Satz 3.6.2). Die Quadrik Q_3 besitzt dann die Gleichung $f_1 + f_2 =: f_3 = (x_1 + x_2)^2 + 2x_0x_4 + 2x_3x_4 + x_4^2 = 0$. Ein beliebiger Punkt $y \in G\backslash\Phi$ ist durch $y = (\lambda, 1, -1, \mu, 0)$ für $\lambda, \mu \in k$ und $\lambda + \mu \neq 0$ gegeben. Nun ist $f_3(y) = 0$, $f_1(y) = -2$, $g_3(x, y) = (\lambda + \mu)x_4$ und $g_1(x, y) = x_2 - x_1 + \mu x_4$. Setzt man dies in Gleichung (3.9) ein (und zwar f_3 für dortiges f_1 und f_1 für dortiges f_2), so erhält man für das Polynom g, dessen Nullstellenmenge der Kegel Z an Φ mit Spitze y ist,

$$g = (-2((x_1 + x_2)^2 + 2x_0x_4 + 2x_3x_4 + x_4^2) - 2(\lambda + \mu)x_4(x_2 - x_1 + \mu x_4))^2 -$$

$$-4(\lambda + \mu)^2x_4^2((x_2 - x_1 + \mu x_4)^2 + 4x_1x_2 + 4x_3x_4).$$

Wir projizieren nun die Fläche Φ auf die Hyperebene $H = V(x_1 - x_2 + (\frac{\lambda-\mu}{2})x_4)$ indem wir hierin x_2 durch $x_1 + (\frac{\lambda-\mu}{2})x_4$ ersetzen. Nach einiger Rechnung erhält man für die Gleichung von F $(= Z \cap H)$, falls man durch vier dividiert:

$$f = ((2x_1 + (\frac{\lambda - \mu}{2})x_4)^2 + x_4(2x_0 + 2x_3 + x_4))^2 +$$

$$+(\lambda + \mu)^2x_4^3((\frac{\lambda - \mu}{2})^2x_4 + 2x_0 - 2x_3)$$

Durch die Koordinatentransformation $x'_0 = ((\frac{\lambda-\mu}{2})^2x_4 + 2x_0 - 2x_3)/(\lambda+\mu)^2$, $x'_1 = 2x_1 + (\frac{\lambda-\mu}{2})x_4$, $x'_2 = x_4$ und $x'_3 = x_0 + x_3 + \frac{1}{2}x_4$ gelangt man von dort zu der gewünschten Gleichung (3.14) (wenn man die Striche als Kennzeichnung der neuen Koordinaten wieder entfernt und beachtet, daß die Transformation unabhängig von λ und μ stets bijektiv ist). ■

Satz 3.6.6. *Für die Quartiken F der Gleichungen* (3.13) *und* (3.14) *ist die Chow–Varietät $C_{1,2}(F)^{irr}$ irreduzibel und zweidimensional. Die auf F gelegenen Kegelschnitte gehören zu einem zweidimensionalen linearen System von Kurven, unter denen auch die Doppelgeraden von F vorkommen (im ersten Fall sind dies zwei und im zweiten eine), welche die einzigen Geraden auf F sind.*

Beweis. Der Beweis verläuft völlig analog zu dem von Satz 3.6.2. Dabei ist im ersten Fall das durch $ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2x_3$ und im zweiten Fall das durch $a(x_1^2 + 2x_2x_3) + bx_1x_2 + cx_2^2$ für $a, b, c \in k$ gegebene lineare Netz von Kegeln (an Stelle des dortigen) zu verwenden. ■

Die beiden Quartiken mit den Gleichungen (3.13) und (3.14) treten somit als Entartungsfälle der Römerfläche von Steiner auf. Deshalb werden sie auch *Römerfläche erster* bzw. *zweiter Art* genannt. In Anlehnung an Satz 3.2.2 führen wir die Typenbezeichnungen (f10) bzw. (h7) ein.

3.7 Quartiken mit zwei schneidenden Doppelgeraden

Analog zur Herleitung von Gleichung (3.11) zu Anfang des Paragraphen 3.5 findet man für die hier zu betrachtenden Quartiken die Gleichungsform:

$$f = (2x_0x_2 - 2x_3u_1)^2 - 4x_3^2v_2 = 0 \tag{3.15}$$

mit homogenen Polynomen $u_1, v_2 \in k[x_0, \ldots, x_3]$ der respektiven Grade eins und zwei, wobei $\bar{g_1} = V(\{x_0, x_3\})$ und $\bar{g_2} = V(\{x_2, x_3\})$ die beiden Doppelgeraden sind. Aus Satz 3.4.1 ergibt sich daher wieder, daß jede der hier betrachteten Quartiken als Projektion einer Schnittfläche $\Phi = Q_1 \cap Q_2 \subset \mathbb{P}^4$ zweier Quadriken gemäß Paragraph 3.4 auftritt. Darüber hinaus können wir in diesem Paragraphen annehmen, daß das von Q_1 und Q_2 aufgespannte lineare Büschel L singularitätenfreie Quadriken besitzt, da nach dem letzten Paragraphen andernfalls eine Römerfläche bzw. ihr Entartungstyp (f10) vorliegt. Daher können wir die Fläche Φ durch die Segre–Symbole klassifizieren und die Sätze 3.4.9 bis 3.4.11 anwenden. Korollar 3.4.3 zufolge muß das Projektionszentrum hier allerdings auf einem der höchstens fünf Kegel des linearen Büschels L angenommen werden. Wir wollen stets die in Satz 3.4.1 konstruierte Fläche $\Phi = V(2x_0x_2 + 2x_3x_4) \cap V(x_4^2 - v_2) = Q_1 \cap Q_2$ betrachten, so daß mit Korollar 3.4.3 $Y = \bar{g_1} \cup \bar{g_2}$ folgt. Daher können wir y stets auf einem Kegel erster Art aus L annehmen. Auf welchem der Kegel y liegen soll, wird durch einen Querstrich über der betreffenden Ziffer oder Klammer des Segre–Symbols von Φ angedeutet. Wie schon im Paragraph 3.5 ist besonderes Augenmerk auf die Regelflächen Φ zu richten. Laut Satz 3.4.11 ist der Fall $[(22)\bar{1}]$ zu betrachten. Sei dazu Q_1 der Kegel erster Art aus L und Q_2 derjenige zweiter Art. Die Verbindungsebene der beiden Spitzen s_1 und s_2 dieser Kegel sei E. Sie ist wegen $s_2 \subset \Phi \subset Q_1$ in Q_1 enthalten. Für die Lage von y sind die Fälle $y \in E$ und $y \notin E$ zu unterscheiden.

Im ersten Fall folgt $\pi_y(s_2) \subset Y$, so daß F nur die beiden Doppelgeraden $\bar{g_1}$ und $\bar{g_2}$ mit $\bar{g_1} \cup \bar{g_2} = Y$ besitzt. Sei o.B.d.A. $\bar{g_1} = \pi_y(s_2)$. Wie im Beweis des Satzes 3.5.2 sieht man, daß die Ebenen des linearen Büschels von Q_1, welchem E

angehört, Φ in Kegelschnitten schneiden und auf Elemente des Ebenenbüschels $\bar{g_2}^\vee$ abgebildet werden (Satz 3.4.7). Die Ebenen des anderen linearen Büschels und die im Kegel Q_2 enthaltenen schneiden Φ jedoch in Geraden und werden auf Ebenen des Büschels $\bar{g_1}^\vee$ abgebildet. Die Sätze 3.4.4 bis 3.4.7 sowie 3.4.11 liefern daraus unter Berücksichtigung der Tatsache, daß im Fall $y \notin E$ drei Doppelgeraden auf F vorhanden sind, den

Satz 3.7.1. *Unter den Quartiken F vom Typ (f) (nach Paragraph 3.2) gibt es einen Typ von Regelflächen, den wir mit (f1) bezeichnen und der die Segre–Charakteristik* $[(22)\bar{1}]$ *besitzt. Die Chow–Varietät $C_{1,2}(F)^{irr}$ ist für diese irreduzibel und eindimensional. Insbesondere gehören alle Kegelschnitte von F dem linearen System ohne feste Bestandteile an, das von einem der beiden Ebenenbüschel $\bar{g_1}^\vee$ oder $\bar{g_2}^\vee$ induziert wird.*

Nun betrachten wir den Fall $y \notin E$, in dem, wie schon oben bemerkt, wegen $\pi_y(s_2) \nsubseteq Y$ drei Doppelgeraden auf F existieren. Daß $\pi_y(s_2)$ eine Doppelgerade von F ist, sieht man wie in der Begründung von Satz 3.5.1. Den Sätze 3.2.2 und 3.6.3 zufolge kann F nur noch zum Typ (d) gehören. Seien nun $\bar{g_1}$ und $\bar{g_3}$ die zueinander windschiefen Doppelgeraden einer Quartik F vom Typ (d). Alle Ebenen der Büschel $\bar{g_1}^\vee$ und $\bar{g_2}^\vee$ schneiden F in Geraden, da im Schnitt stets eine Singularität außerhalb der Trägergeraden dieser Büschel vorhanden ist. Daher sind Flächen vom Typ (d) auch stets Regelflächen und man erhält in Analogie zum vorherigen Satz den

Satz 3.7.2. *Alle Quartiken F vom Typ (d) sind Regelflächen mit der Segre–Charakteristik* $[(22)\bar{1}]$. *Außerdem ist für diese die Chow–Varietät $C_{1,2}(F)^{irr}$ irreduzibel und eindimensional. Alle Kegelschnitte von F gehören dem linearen System ohne feste Bestandteile an, das vom Ebenenbüschel $\bar{g_2}^\vee$ induziert wird, wobei $\bar{g_2}$ diejenige Doppelgerade von F ist, welche die beiden anderen schneidet.*

Für die übrigbleibenden Quartiken mit zwei sich schneidenden Doppelgeraden erhält man durch Anwendung der Sätze aus Paragraph 3.4 schließlich den

Satz 3.7.3. *Für die Quartiken F vom Typ (f), die weder Regelflächen noch Römerflächen zweiter Art sind, zerfallen die Chow–Varietäten $C_{1,2}(F)^{irr}$ in zwei bis acht oder zehn eindimensionale irreduzible Komponenten, welche entsprechend viele einparametrige algebraische Familien von Kegelschnitten auf F liefern. Die Varietäten $T^\vee \subset \mathbb{P}^{3^\vee}$ der Trägerebenen zu diesen Familien (gemäß Satz 2.6.3) sind entweder offene Teilmengen von Geraden oder von Kegelschnitten des $\mathbb{P}^{3^\vee}$. In ersterem Fall schneiden die Trägerebenen Kegelschnittpaare derselben Familie aus F aus, (wenn man von den Fällen $T^\vee \subseteq \bar{g_1}^\vee$ und $T^\vee \subseteq g_2{}^\vee$ absieht, in denen die Trägerebenen nur einen Kegelschnitt von F enthalten) während sie im zweiten Fall einen quadratischen Kegel (*Kummerschen Kegel*) des $\mathbb{P}^3$ einhüllen und aus F je zwei Kegelschnitte zweier verschiedener Familien ausschneiden.*

Wir teilen nun diese Quartiken auf ähnliche Weise wie im Anschluß an Satz 3.5.1 ein wobei die Zahl der algebraischen Familien von Kegelschnitten auf F das einzige Unterscheidungskriterium ist (vgl. Tabelle 1).

(f2)	2	0	$[\bar{5}]$
(f3)	3	0	$[(31)\bar{1}], [\bar{3}(11)], [\bar{2}(21)], [\bar{1}(11)(11)]$
(f4)	4	1	$[\bar{4}1], [4\bar{1}], [\bar{3}2], [3\bar{2}]$
(f5)	5	1	$[(21)\bar{1}1], [\bar{2}(11)1], [2(11)\bar{1}]$
(f6)	6	2	$[\bar{3}11], [3\bar{1}1], [\bar{2}21], [22\bar{1}]$
(f7)	7	2	$[(11)\bar{1}11]$
(f8)	8	3	$[\bar{2}111], [2\bar{1}11]$
(f9)	10	4	$[\bar{1}1111]$

Tabelle 2
Erste Spalte: Typ-Bezeichnung
Zweite Spalte: Anzahl der Kegelschnittfamilien
Dritte Spalte: Anzahl der Kummerschen Kegel
Vierte Spalte: Segre–Symbol der zugehörigen Flächen Φ

3.8 Quartiken mit zwei windschiefen Doppelgeraden

Da die Quartiken vom Typ (d) bereits im vorigen Paragraphen abgehandelt wurden, bleiben hier nur die Flächen vom Typ (g) zu betrachten, die natürlich ebenso Regelflächen sind. Die beiden windschiefen Doppelgeraden bezeichnen wir mit $\bar{g}_1$ und $\bar{g}_2$. Die Kürze dieses Paragraphen verdankt man

Satz 3.8.1. *Eine Quartik F vom Typ (g) (nach Paragraph 3.2) enthält überhaupt keinen Kegelschnitt, also $C_{1,2}(F)^{irr} = \emptyset$.*

Beweis. Zunächst besitzt F keine zu $\bar{g}_1$ und $\bar{g}_2$ windschiefe Gerade, denn nimmt man als solche etwa h an, so findet man in jeder Ebene $E_0{}^\vee \in h^\vee$ als Verbindungsgerade der Punkte $E_0 \cap \bar{g}_1$ und $E_0 \cap \bar{g}_2$ eine Gerade der Quadrik aller Treffgeraden von $\bar{g}_1, \bar{g}_2$ und h. Da diese Geraden in F enthalten sind (sie schneiden mit Multiplizität gezählt in mindestens fünf Punkten), muß dies auch für diese Quadrik gelten. Dies widerspricht aber der Irreduzibilität und dem Grad von F. Als Verschärfung dieser Aussage erhält man nun, daß jede Gerade h auf F sogar beide Doppelgeraden schneidet, denn unter der Voraussetzung $h \cap \bar{g}_1 \neq \emptyset$ (o.B.d.A.) sieht man bei der Betrachtung des Schnitts von F mit der Verbindungsebene E_1 von h und $\bar{g}_1$, daß auch $h \cap \bar{g}_2 \neq \emptyset$ gelten muß, weil der Punkt $z := E_1 \cap \bar{g}_2$ singulär in diesem ist (aus $(E_1 \cap F)^{div} = 2g_1 + h + g$ und $\mu_z((E_1 \cap F)^{div}) \geq 2$ folgt $z \in h \cap g$).
Wir nehmen nun einen Kegelschnitt C_2 auf F an, dessen Trägerebene wieder

mit E bezeichnet wird. Es gilt sicherlich $E \notin \bar{g_1}^\vee \cup \bar{g_2}^\vee$, denn jene Ebenen schneiden F nur in Geraden. Satz 2.5.7 zufolge gibt es nun Geraden g und h mit $(F \cap E)^{div} = C_2 + g + h$. Der Fall $g \neq h$ ist nicht möglich, da zwei verschiedene Geraden eine der beiden Doppelgeraden in zwei getrennten Punkten schneiden würden, weshalb E doch eine solche enthalten müßte. Also ist $g = h$. Sei $x := g \cap \bar{g_1}$ und $y := g \cap \bar{g_2}$. Da nun $(TC_xF)^\vee \subset \bar{g_1}^\vee$ und $(TC_yF)^\vee \subset \bar{g_2}^\vee$ gilt (Satz 2.6.1), also $E \not\subseteq TC_xF$ und $E \not\subseteq TC_yF$, liefert Lemma 2.5.5 $\mu_x((F \cap E)^{div}) = \mu_x(C_2 + 2g) = 2$ sowie $\mu_y((F \cap E)^{div}) = \mu_y(C_2 + 2g) = 2$ und damit $x, y \notin C_2$. Nun gilt $TC_xF \cap E = TC_yF \cap E = g$, denn im Schnitt $E \cap F$ geht jede von g verschiedene Gerade durch x bzw. y mit nur zweifacher Multiplizität durch diese Punkte, da sie C_2 schon in zwei Punkten schneidet. Daher ist TC_xF die Verbindungsebene von g und $\bar{g_1}$ und TC_yF diejenige von g und $\bar{g_2}$. Betrachtet man nun eine von E verschiedene Ebene E' durch g, so schneidet diese F in g und einer Restkurve R, wobei $g \not\subseteq R$ und $\mu_z((F \cap E')^{div}) = 1$ für alle Punkte $z \in g \backslash R$ gilt (beachte $E' \neq E = T_pF$ für jedes $p \in g \cap F^{sm}$ und Lemma 2.5.5). Daher enthält R x und y als reguläre Punkte ($\mu_x(R) = \mu_y(R) = 1$ wegen $\mu_x((F \cap E')^{div}) = \mu_x(g + R) = 2$ und $\mu_y((F \cap E')^{div}) = \mu_y(g + R) = 2$). Aus $T_xR \subset TC_xF$ und $T_yR \subset TC_yF$ (siehe Gleichung Stern im Beweis von Satz 2.6.1) folgt schließlich $T_xR = T_yR = g$. Letzteres ist jedoch wegen $\deg R \leq 3$ unmöglich. ■

3.9 Quartiken mit einer Gerade von Doppelpunkten

Von den Quartiken f, welche eine Gerade $\bar{g} \subseteq \operatorname{Sing} F$, $\bar{g} \not\subseteq \operatorname{Sing}_3 F$ von Doppelpunkten besitzen, sind nun bereits alle bis auf die des Typs (h) behandelt worden. Bevor jedoch für letztere die Untersuchung von $C_{1,2}(F)^{irr}$ vorgenommen wird, sollen einige analytische Betrachtungen über die Quartiken mit einer Doppelgeraden $\bar{g}$ angestellt werden. Dazu bezeichnen wir wieder mit f das irreduzible homogene Polynom, dessen Nullstellenmenge F ist, und mit $A_0, \ldots, A_3$ die Grundpunkte des Koordinatensystems. Wählt man A_2 und A_3 auf $\bar{g}$, so sieht man leicht, daß f von der Bauart

$$f = x_2^2 u_2 + 2x_2x_3v_2 + x_3^2 w_2 + 2x_2u_3 + 2x_3v_3 + u_4 \tag{3.16}$$

ist, worin $u_2, v_2, w_2, u_3, v_3, u_4 \in k[x_0, x_1]$ homogen vom Grad der entsprechenden Indizes sind (vgl. [16, S.444]). Die Formen u_2, v_2 und w_2 sind nicht gleichzeitig identisch Null, da sonst $\bar{g} \subseteq \operatorname{Sing}_3 F$ wäre. Bisher ist nicht klar, wann ein Polynom der Form (3.16) irreduzibel ist. Auf diese Frage wird zunächst eine Teilantwort gegeben. Dem Polynom f entspricht im allgemeinen ein Divisor D des $\mathbb{P}^3$. Sehr einfach ist der Fall zu übersehen, in dem D eine Ebene durch die Gerade $\bar{g} = V(\{x_0, x_1\})$ als einen Summanden enthält. Dieser Fall tritt nämlich

genau dann auf, wenn $u_2, v_2, w_2, u_3, v_3, u_4$ einen gemeinsamen Faktor besitzen. Um dies einzusehen, kann man eine Koordinatentransformation durchführen, so daß der neue Koordinatengrundpunkt A_1 in die Ebene E zu liegen kommt, nach deren Ausführung also $E = V(x_0)$ gilt. An der so transformierten Gleichung (3.16) erkennt man dann leicht, daß x_0 die Formen $u_2, v_2, w_2, u_3, v_3, u_4$ allesamt teilen muß.
Das Polynom f wurde so konstruiert, daß für alle Punkte $x \in \bar{g}$ $\mu_x(D) \geq 2$ gilt. Daher schneiden alle Ebenen E durch $\bar{g}$, die nicht in D als Summand auftreten, D in dem Divisor $(D \cap E)^{div} = 2\bar{g} + R_E$, worin R_E ein Restdivisor zweiten Grades von E ist.

Satz 3.9.1. *Wenn es für den zum Polynom f aus Gleichung* (3.16) *gehörigen Divisor D des $\mathbb{P}^3$ eine Ebene E durch die Gerade $\bar{g} = V(\{x_0, x_1\})$ gibt, so daß $(D \cap E)^{div} = 2\bar{g} + R_E$ mit einem Kegelschnitt R_E gilt, so ist D genau dann eine irreduzible Fläche vierter Ordnung, wenn die Formen $u_2, v_2, w_2, u_3, v_3, u_4$ keinen gemeinsamen Teiler besitzen.*

Beweis. Die Aussagerichtung '$\Longrightarrow$' ist klar. Für den Beweis der anderen Richtung sei zunächst bemerkt, daß für Punkte x aus einer geeigneten nichtleeren offenen Teilmenge von $\bar{g}$ stets $\mu_x(D) = 2$ ist, da u_2, v_2 und w_2 nach Voraussetzung nicht gleichzeitig verschwinden. Falls nun D keine Quartik ist und eine Ebene durch $\bar{g}$ enthält, so folgt die Behauptung des Satzes aus den Vorbemerkungen zu diesem. Wenn nun aber D keine Quartik ist, aber auch keine Ebene durch $\bar{g}$ enthält, so kann D nur noch in zwei (möglicherweise übereinstimmende) Quadriken durch $\bar{g}$ oder aber in eine Kubik mit Doppelgerade $\bar{g}$ und eine nicht durch $\bar{g}$ gehende Ebene zerfallen. In beiden Fällen sieht man aber sofort, daß die R_E keine Kegelschnitte sein können. ■

Wir wollen nun die analytische Bedingung in (3.16) dafür berechnen, daß R_E ein Kegelschnitt ist. Dazu betrachten wir den Fall $E \neq V(x_1)$ (der Fall $E \neq V(x_0)$ verläuft analog) und schreiben $E = V(ax_0 - bx_1)$ mit $a \neq 0$. Der Divisor R_E wird auf E durch ein Polynom $g = \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij} x_i x_j \in k[x_1, x_2, x_3]$ induziert, und man kann hierin o.B.d.A. $A := (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,3}$ als symmetrisch (also als Darstellungsmatrix von R_E) annehmen. Man berechnet A, indem man in (3.16) $x_0 = \frac{b}{a} x_1$ ersetzt und mit a^4 durchmultipliziert, zu

$$A = \begin{pmatrix} u_4(b,a) & au_3(b,a) & av_3(b,a) \\ au_3(b,a) & a^2u_2(b,a) & a^2v_2(b,a) \\ av_3(b,a) & a^2v_2(b,a) & a^2w_2(b,a) \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

Nun ist R_E genau dann ein Kegelschnitt, wenn $\det A \neq 0$ ist. Diejenigen Ebenen $E = V(ax_0 - bx_1)$, für die R_E zerfällt, sind daher durch die Nullstellen des folgenden Polynoms achten Grades in (b, a) gegeben:

$$r = u_4(u_2w_2 - v_2^2) - v_3^2u_2 - u_3^2w_2 + 2u_3v_3v_2 \tag{3.18}$$

In dem durch Satz 3.9.1 behandelten Fall gibt es daher höchstens acht Ebenen durch $\bar{g}$, für die R_E kein Kegelschnitt ist. Der gegenteilige Fall, daß alle Ebenen durch $\bar{g}$ keine Kegelschnitte aus F auschneiden, ist durch das identische Verschwinden von r gekennzeichnet. Während im ersten Fall klar ist, daß es eine einparametrige algebraische Familie von Kegelschnitten auf F gibt, nämlich die so erhaltenen, bereitet der zweite Fall noch einige Mühe.

An (3.16) kann man die Gleichungen der Tangentenkegel an F in den Punkten A_2 und A_3 ablesen, die offensichtlich in Ebenen durch $\bar{g}$ zerfallen: $TC_{A_2}F = V(u_2)$ und $TC_{A_3}F = V(w_2)$. Um den Tangentenkegel in einem beliebigen Punkt x von $\bar{g}$ zu berechnen, transformiert man in (3.16) etwa A_3 in den neuen Koordinatengrundpunkt $x = A_3' = (0,0,\lambda,\mu) \in \bar{g}\backslash\{A_2\}$ $(\mu \neq 0)$. Im neuen Koordinatensystem gilt

$$f = x_2^2 u_2 + 2x_2x_3(\underbrace{\lambda u_2 + \mu v_2}_{=:v_x}) + x_3^2(\underbrace{\lambda^2 u_2 + 2\lambda\mu v_2 + \mu^2 w_2}_{=:w_x}) +$$

$$+2x_2u_3 + 2x_3v_3 + u_4. \tag{3.19}$$

Eine entsprechende Gleichung erhält man für $x \in \bar{g}\backslash\{A_3\}$. Da Ebenen durch $\bar{g}$ in all diesen Koordinatensystemen dieselbe Gleichung besitzen, gilt auch im ursprünglichen Koordinatensystem $TC_xF = V(w_x)$.

Satz 3.9.2. *Die Gleichung einer Quartik vom Typ (h) (gemäß Paragraph 3.2), für welche die Form r aus* (3.18) *identisch verschwindet, vereinfacht sich bei Wahl der Koordinatengrundpunkte $A_0 \in TC_{A_2}F$ und $A_1 \in TC_{A_3}F$ zu*

$$f = (x_0x_2 + x_1x_3 + u_2)^2 + v_4 = 0, \tag{3.20}$$

wobei $u_2, v_4 \in k[x_0, x_1]$ homogen vom Grad zwei und vier sind, und v_4 aus vier verschiedenen linearen Faktoren besteht.

Beweis. Für jede Ebene E durch $\bar{g}$ schreiben wir $(F\cap E)^{div} = 2\bar{g} + g_E + h_E$ mit den von E abhängenden Geraden g_E und h_E. Auf einer geeigneten nichtleeren offenen Menge von Ebenen durch $\bar{g}$ gilt Korollar 2.6.2 zufolge $\mathrm{Cont}_E F \subseteq \bar{g}$ für alle Ebenen E aus dieser Menge sowie $E \cap \mathrm{Sing}\, F = \bar{g}$, da F außerhalb $\bar{g}$ höchstens isolierte Singularitäten besitzt. Das heißt aber, daß sich die Geraden g_E und h_E stets auf $\bar{g}$ schneiden. Denn wäre $z := g_E \cap h_E \notin \bar{g}$, dann ist z regulär, also nach Lemma 2.5.5 $E = T_zF$, was auf den Widerspruch $z \in \mathrm{Cont}_E F$ führt. Zu der Ebene $E := V(ax_0 - bx_1)$ gibt es daher stets einen Vektor $v = (0, v_2, v_3)$, für den mit der Matrix A aus (3.17) $Av = 0$ gilt (v entspricht dabei dem Schnittpunkt von g_E und h_E auf $\bar{g}$). Daher muß für alle Zahlen a, b die rechte untere 2×2–Unterdeterminante von $\det A$ verschwinden. Das bedeutet aber

$$u_2w_2 = v_2^2. \tag{$*$}$$

Wäre $v_2 \equiv 0$, dann wegen $(*)$ auch $u_2 \equiv 0$ oder $w_2 \equiv 0$. Sei o.B.d.A. $u_2 \equiv 0$, also $w_2 \not\equiv 0$ (sonst wäre F vom Typ (i)). Aus (3.18) folgt $u_3 \equiv 0$ und daraus $f \in k[x_0, x_1, x_2]$. Dann ist F ein Kegel mit Spitze A_2, was hier aber ausgeschlossen wurde. Daher gilt $v_2 \not\equiv 0$ und wegen $(*)$ auch $u_2 \not\equiv 0$ und $w_2 \not\equiv 0$. Würden u_2 und w_2 je in zwei verschiedene lineare Faktoren zerfallen, so wären sie beide nach $(*)$ zu v_2 proportional (Primfaktorzerlegung!). An (3.19) erkennt man dann, daß es ein $x \in \bar{g}$ geben muß, so daß $w_x \equiv 0$ ist. Dies kann aber nicht sein, denn die Argumentation. daß $w_2 \not\equiv 0$ gilt, war unabhängig von der Wahl des Koordinatengrundpunktes A_3 auf $\bar{g}$. Die eindeutige Primfaktorzerlegung in $k[x_0, x_1]$ zeigt nun, daß sowohl u_2 als auch w_2 stets Quadrate linearer Polynome sind. Wählt man $A_1 \in TC_{A_2}F, A_0 \in TC_{A_3}F$ und geeignete Normierungsfaktoren, so erhält man $u_2 = x_0^2,\ w_2 = x_1^2$ und aus $(*)$ $v_2 = x_0x_1$. Die Bedingung, daß das Polynom r aus (3.18) identisch verschwindet, liefert nun $(v_3x_0 - u_3x_1)^2 = 0$, woraus man durch Vergleich der Primfaktoren auf $v_3 = x_1u_2$ und $u_3 = x_0u_2$ mit einem geeigneten $u_2 \in k[x_0, x_1]$ schließt. Setzt man all dies in Gleichung (3.16) ein und definiert $v_4 := u_4 - u_2^2 \in k[x_0, x_1]$, so resultiert als Gleichung von F:

$$f = (x_0x_2 + x_1x_3)^2 + 2(x_0x_2 + x_1x_3)u_2 + u_4 =$$

$$= (x_0x_2 + x_1x_3 + u_2)^2 + v_4 = 0. \qquad (**)$$

Wenn v_4 einen zweifachen linearen Faktor besitzt, so schneidet die zu diesem gehörige Ebene aus F eine weitere von $\bar{g}$ verschiedene Doppelgerade aus (betrachte die Ableitungen von f) und man sieht, daß F notwendigerweise eine Quartik vom Typ (f) ist. Damit besteht v_4 aus vier verschiedene Faktoren. ■

Bemerkung: Da in (3.20) die Wahl der Koordinatengrundpunkte auf $\bar{g}$ beliebig ist, sieht man, daß TC_xF für alle $x \in \bar{g}$ eine einzige Ebene ist, weil dies in (3.20) für A_2 und A_3 gilt (vgl. (3.19)).

Satz 3.9.3. *Eine Quartik F vom Typ (h), für die r aus* (3.18) *identisch verschwindet, enthält überhaupt keine Kegelschnitte, also $C_{1,2}(F)^{irr} = \emptyset$.*

Beweis. Zunächst gibt es keine zu $\bar{g}$ windschiefe Gerade auf F. Denn wäre h eine solche, so kann man in (3.20) $A_0, A_1 \in h$ wählen, und es müßte in diesem neuen Koordinatensystem $u_2^2 = -v_4$ gelten, was aber nicht möglich ist, da v_4 nach Satz 3.9.2 in vier verschiedene Faktoren zerfällt.
Nun nehmen wir einen Kegelschnitt $C_2 \subset F$ mit Trägerebene E an, welche sicherlich nicht die Gerade $\bar{g}$ enthält. Sei $x := E \cap \bar{g}$. Nach Satz 2.5.7 hat man $(F \cap E)^{div} = C_2 + g + h$ mit Geraden g und h, die beide x enthalten, da sie nicht windschief zu $\bar{g}$ sind. Die Verbindungsebenen von g und $\bar{g}$ sowie h und $\bar{g}$ sind Lemma 2.5.5 zufolge in TC_xF enthalten, und da es sich dabei nach obiger Bemerkung nur um eine einzige Ebene handelt, folgt $g = h$. Nun

paßt man das Koordinatensystem wie folgt an: $A_2 := x$, $A_1 \in g \backslash \{A_2\}$ und $A_0 \in (E \cap TC_{A_3}F) \backslash \bar{g}$. In diesem Koordinatensystem hat f die Gestalt (3.20) und es gilt $E = V(x_3)$ und $g = V(\{x_0, x_3\})$. Nun muß das Polynom $l := f(x_0, x_1, x_2, 0) = x_2^2 x_0^2 + 2x_2 x_0 u_2 + u_2^2 + v_4$ wegen $g = h$ von x_0^2 geteilt werden. Dann wird aber notwendigerweise u_2 von x_0 geteilt, denn der Koeffizient des Terms $x_2 x_0 x_1^2$ in l muß Null sein, weshalb u_2 den Term x_1^2 nicht enthalten kann. Daher wird v_4 von x_0^2 geteilt im Widerspruch zu Satz 3.9.2. ■

Nach diesem Satz lassen sich zunächst zwei Untertypen von (h) unterscheiden, von denen der eine, den wir mit (h1) bezeichnen, die Quartiken des Gleichungstyp (3.20) ohne Kegelschnitte umfaßt, während alle nicht zu (h1) gehörigen Flächen des Typs (h) mindestens eine einparametrige algebraische Familie von Kegelschnitten besitzen, deren Varietät der Trägerebenen $T^\vee$ (siehe Satz 2.6.3) eine offene Teilmenge von $\bar{g}^\vee$ ist. Für diese Flächen ist die Anzahl der irreduziblen Komponenten der Chow–Varietät $C_{1,2}(F)^{irr}$ nicht so einfach zu ermitteln wie im Fall der übrigen Typen von Quartiken mit eindimensionalem singulären Ort. Die systematische Untersuchung dieser Frage wird aus diesem Grund unterbleiben. Aus Paragraph 3.6 ist bereits bekannt, daß es Quartiken vom Typ (h) gibt, für die $C_{1,2}(F)^{irr}$ irreduzibel und zweidimensional ist, und die dort mit (h7) typisiert wurden. Die Segre–Methode liefert aber noch weitere Quartiken vom Typ (h), die sich nach Zahl der eindimensionalen irreduziblen Komponenten von $C_{1,2}(F)^{irr}$ unter Verwendung der Sätze aus 3.4 wie folgt ordnen lassen (beachte, daß das Projektionszentrum y nun notwendigerweise auf einem Kegel zweiter Art aus L liegen muß (Korollar 3.4.3), vgl. Tabellen 1 und 2).

(h2)	1	0	$[(4\bar{1})]$
(h3)	3	1	$[(3\bar{1})1], [3(1\bar{1})], [2(2\bar{1})]$
(h4)	4	1	$[(1\bar{1})(11)1]$
(h5)	5	2	$[(2\bar{1})11], [2(1\bar{1})1]$
(h6)	7	3	$[(1\bar{1})111]$

Tabelle 3

Erste Spalte: Typ-Bezeichnung
Zweite Spalte: Anzahl der Kegelschnittfamilien
Dritte Spalte: Anzahl der Kummerschen Kegel
Vierte Spalte: Segre–Symbol der zugehörigen Flächen Φ

Wir führen für alle übrig bleibenden Quartiken vom Typ (h) die einheitliche Bezeichnung (h8) ein, auch wenn dabei möglicherweise Flächen mit einer unterschiedlichen Zahl irreduzibler ein– oder mehrdimensionaler Komponenten von $C_{1,2}(F)^{irr}$ zusammengefaßt werden. Man beachte, daß für die Flächen vom Typ (h8) $C_{1,2}(F)^{irr}$ auch mehrere nulldimensionale Komponenten besitzen kann. Für den allgemeinsten Fall einer Quartik vom Typ (h) (in dem auf F genau sechzehn Geraden liegen, insbesondere also r aus (3.18) acht verschiedene

Nullstellen besitzt) haben die Geometer des letzten Jahrhunderts (vermutlich Clebsch als erster) gezeigt, daß es neben der einparametrigen Kegelschnittfamilie auf F genau noch 128 weitere (isolierte) Kegelschnitte gibt ([5, S.274], [15, S.1633], [12, S.118]).

3.10 Quartiken mit einer Gerade dreifacher Punkte

Abschließend folgt die Behandlung der Quartiken vom Typ (i) gemäß der Einteilung aus Paragraph 3.2, für die der singuläre Ort $\operatorname{Sing} F$ aus einer Gerade $\bar{\bar{g}} = \operatorname{Sing}_3 F$ dreifacher Punkte besteht. Wählt man die Koordinatengrundpunkte A_2 und A_3 wieder auf $\bar{\bar{g}}$, so erhält man als irreduzible Gleichung von F wegen $(TC_{A_2}F)^\vee \subset \bar{\bar{g}}^\vee$, $(TC_{A_3}F)^\vee \subset \bar{\bar{g}}^\vee$ (Satz 2.6.1) und $\mu_{A_2}(F) = \mu_{A_3}(F) = 3$ zusammen mit der Bemerkung im Anschluß an Gleichung (1.3) sofort

$$f = x_2 u_3 + x_3 v_3 + u_4 = 0 \tag{3.21}$$

mit homogenen Formen $u_3, v_3, u_4 \in k[x_0, x_1]$ der Grade drei bzw. vier. Analog zu den Vorbemerkungen zu Satz 3.9.1 sieht man, daß f genau dann irreduzibel ist, wenn u_3, v_3 und u_4 keinen gemeinsamen Faktor besitzen. Man beachte dazu, daß der zu f gehörige Divisor des $\mathbb{P}^3$ eine Ebene durch $\bar{\bar{g}}$ enthalten muß, falls er keine irreduzible Fläche vierten Grades ist. Da wir F stets als von einem Kegel verschieden voraussetzen, können u_3 und v_3 nicht proportional, und schon gar nicht identisch Null sein. Auf ähnliche Weise, wie bei der Herleitung von (3.19) berechnet man den Tangentenkegel an F in einen Punkt $x = (0, 0, \lambda, \mu) \in \bar{\bar{g}}$ zu $TC_x F = V(\lambda u_3 + \mu v_3)$. Man kann die Menge aller homogenen Polynome dritten Grades aus $k[x_0, x_1]$ (bei Identifizierung proportionaler) als Punkte eines dreidimensionalen projektiven Raumes $\mathbb{P}^{\nu_{1,3}} = \mathbb{P}^3$ auffassen. Die von u_3 und v_3 aufgespannte Gerade darin bezeichnen wir mit W.

Satz 3.10.1. *Für eine (von einem Kegel verschiedene) Quartik F vom Typ (i) gibt es durch jeden Punkt von $\bar{\bar{g}}$ höchstens drei von $\bar{\bar{g}}$ verschiedene auf F gelegene Geraden. In den Fällen*

(a) *wo u_3 und v_3 teilerfremd sind, gibt es durch jeden Punkt x von $\bar{\bar{g}}$ mindestens eine von $\bar{\bar{g}}$ verschiedene Gerade auf F und durch alle bis auf höchstens zwei solche Punkte mindestens zwei.*

(b) *wo u_3 und v_3 genau einen gemeinsamen linearen Faktor besitzen, gibt es durch alle bis auf höchstens einen Punkt x von $\bar{\bar{g}}$ mindestens eine von $\bar{\bar{g}}$ verschiedene Gerade auf F und durch alle bis auf höchstens drei solche Punkte genau zwei.*

(c) *wo u_3 und v_3 einen gemeinsamen quadratischen Faktor besitzen, gibt es durch alle bis auf ein oder zwei Punkte von $\bar{\bar{g}}$ genau eine von $\bar{\bar{g}}$ verschiedene Gerade auf F.*

BEWEIS. Jede Ebene E, die zu einem $x \in \bar{\bar{g}}$ im Tangentenkegel TC_xF enthalten ist und F nicht längs $\bar{\bar{g}}$ berührt, schneidet F neben $\bar{\bar{g}}$ in einer weiteren Geraden durch x. Umgekehrt muß aber auch die Verbindungsebene von $\bar{\bar{g}}$ mit einer von $\bar{\bar{g}}$ verschiedenen, auf F gelegenen Gerade durch x in TC_xF enthalten sein (Lemma 2.5.5). Daher gibt es höchstens drei solche Geraden, da TC_xF in höchstens drei Ebenen durch $\bar{\bar{g}}$ zerfällt. Zu jeder Ebene, die F längs $\bar{\bar{g}}$ berührt gehört mindestens ein gemeinsamer linearer Faktor von u_3 und v_3 und umgekehrt.
Im Fall (a) geht daher durch jeden Punkt von $\bar{\bar{g}}$ mindestens eine von $\bar{\bar{g}}$ verschiedene auf F gelegene Gerade, da es keine Ebene gibt, welche F längs $\bar{\bar{g}}$ berührt. Wenn man nun die homogenen Formen dritten Grades aus $k[x_0, x_1]$ als Punkte des Raums $\mathbb{P}^{\nu_{1,3}} = \mathbb{P}^3$ auffaßt, so bilden hierin die in die dritte Potenz erhobenen linearen Formen eine irreduzible kubische Raumkurve V_1^3 (*Veronesekubik*, vgl. die Einführung der kubischen Kurven in Paragraph 3.3). Die oben definierte Gerade W schneidet V_1^3 aber höchstens in zwei Punkten (siehe 3.3) und daher besteht für alle bis auf höchstens zwei Punkte von $\bar{\bar{g}}$ der Tangentenkegel TC_xF aus mindestens zwei verschiedenen Ebenen. Aus den Bemerkungen zu Anfang des Beweises folgt deshalb (a).
Im Fall (b) kann man $\lambda u_3 + \mu v_3 = w_1(\lambda u_2 + \mu v_2)$ mit einer linearen Form w_1 und quadratischen Formen u_2 und v_2 schreiben. Die von u_2 und v_2 in $\mathbb{P}^{\nu_{1,2}} = \mathbb{P}^2$ aufgespannte Gerade W' schneidet den *Veronesekegelschnitt* $V_1^2 \subset \mathbb{P}^{\nu_{1,2}}$, dessen Punkten die in die zweite Potenz erhobenen linearen Formen entsprechen, in höchstens zwei Punkten. Die Tangente an V_1^2 in dem der Form w_1^2 entsprechenden Punkt von V_1^2 enthält alle quadratischen Polynome, die von w_1 geteilt werden. Da sie sicherlich von W' verschieden ist, gibt es mit ihr genau einen Schnittpunkt. Aus den Bemerkungen zu Anfang des Beweises folgt nun (b), denn es kann höchstens einen Punkt $x \in \bar{\bar{g}}$ geben, für den $TC_xF = V(w_1)$ ist (falls $w_1^2 \in W'$) und höchstens drei, für die TC_xF weniger als zwei von $V(w_1)$ verschiedene Ebenen enthält.
Im Fall (c) schreibt man $\lambda u_3 + \mu v_3 = w_2(\lambda u_1 + \mu v_1)$ mit der quadratischen Form w_2 und den beiden linearen Formen u_1 und v_1. Nun wird für höchstens zwei Punkte $x = (0, 0\lambda, \mu) \in \bar{\bar{g}}$ das Polynom w_2 von $\lambda u_1 + \mu v_1$ geteilt und aus den Bemerkungen zu Anfang des Beweises folgt schließlich (c). ■

Mit Hilfe dieses Satzes lassen sich die Quartiken F vom Typ (i), die nun insbesondere als Regelflächen erkannt sind, in drei Untertypen mit folgenden kennzeichnenden Eigenschaften einteilen:

- (i1) Durch alle bis auf höchstens zwei Punkte von $\bar{\bar{g}}$ geht genau eine von $\bar{\bar{g}}$ verschiedene, auf F gelegene Gerade (Fall (c) aus Satz 3.10.1).
- (i2) F enthält eine zu $\bar{\bar{g}}$ windschiefe Gerade.
- (i3) F enthält keine zu $\bar{\bar{g}}$ windschiefe Gerade und durch alle bis auf höchstens drei Punkte von $\bar{\bar{g}}$ gehen mindestens zwei von $\bar{\bar{g}}$ verschiedene, auf F

gelegene Gerade.

Zur Rechtfertigung dieser Einteilung ist noch zu überlegen, daß es für eine Quartik F vom Typ (i1) keine zu $\bar{\bar{g}}$ windschiefe Gerade auf F gibt. Denn wäre etwa $h \subset F$ zu $\bar{\bar{g}}$ windschief, so schneidet jede Ebene $E^\vee \in h^\vee$ durch h mit $\mathrm{Cont}_E F \subseteq h$ (bilden nach Korollar 2.6.2 eine offene Menge in $h^\vee$) die Fläche F neben h in drei verschiedenen durch $x := E \cap \bar{\bar{g}}$ gehenden Geraden, da $\mu_x((F \cap E)^{div}) \geq 3$ gilt und eine ebene Kurve dritter Ordnung mit dreifachem Punkt in lauter Geraden durch diesen zerfällt.

Satz 3.10.2. *Die Quartiken der Typen (i1) und (i2) enthalten keine Kegelschnitte, also $C_{1,2}(F)^{irr} = \emptyset$.*

Beweis. Fall (i1): Nehme einen Kegelschnitt $C_2 \subset F$ mit Trägerebene E an. Laut Satz 2.5.7 gibt es Geraden g_1 und g_1 mit $(F \cap E)^{div} = C_2 + g_1 + g_2$. Die Ebene E enthält sicherlich nicht $\bar{\bar{g}}$, da derartige Ebenen F nur in Geraden schneiden. Nach Voraussetzung über den Typ (i1) gibt es durch $x := E \cap \bar{\bar{g}}$ genau eine Gerade, aber keine zu $\bar{\bar{g}}$ windschiefe auf F gelegene Gerade. Daraus schließt man $g_1 = g_2$ und wegen $\mathrm{Sing}\, F = \bar{\bar{g}}$ (Satz 3.2.2) folgt $g_1 = \mathrm{Cont}_E F$. In Gleichung (3.21) kann man die Koordinatenwahl $A_2 := x$, $A_1 \in g_1 \backslash \bar{\bar{g}}$ sowie $A_0 \in E \backslash g_1$ annehmen. Damit gilt $E = V(x_3)$ und $g = V(\{x_0, x_3\})$ sowie $f = (x_2 x_0 + x_3 u_1) w_2 + u_4$ (Satz 3.10.1 (c)) mit geeigneten $u_1, w_2, u_4 \in k[x_0, x_1]$. Folglich muß $x_2 x_0 w_2 + u_4$ von x_0^2 geteilt werden. Dies kann nur sein wenn w_2 von x_0 und u_4 von x_0^2 geteilt wird, was aber auf die Reduzibilität von f führt (vgl. Beweis von Satz 3.9.3).
Fall (i2): Sei h die zu $\bar{\bar{g}}$ windschiefe Gerade auf F. Es wurde bereits im Anschluß an obige Einteilung gezeigt, daß es durch Punkte x aus einer geeigneten offenen Teilmenge von $\bar{\bar{g}}$ stets genau drei verschiedene Geraden auf F gibt, welche h schneiden. Daran erkennt man, daß es auf F keine von h verschiedene und zu $\bar{\bar{g}}$ windschiefe Gerade geben kann. Denn wäre l eine solche, so schneidet l für zwei verschiedene Punkte $x, y \in \bar{\bar{g}}$ sowohl die drei auf F gelegenen Geraden durch x als auch die durch y. Deren jeweilige Verbindungsebenen schneiden sich aber in h und es folgt $h = l$. Es wird nun wieder ein Kegelschnitt $C_2 \subset F$ mit Trägerebene E angenommen, welche sicherlich nicht zu den Büscheln $\bar{\bar{g}}^\vee$ und $h^\vee$ gehört. Es gibt nach Satz 2.5.7 Geraden g_1 und g_2 mit $(F \cap E)^{div} = C_2 + g_1 + g_2$. Aus $g_1 \neq g_2$ würde $h \subset E$ folgen, da beide Geraden h schneiden, ihr gemeinsamer Punkt aber auf $\bar{\bar{g}}$ liegt (g_1, g_2 nicht windschief zu $\bar{\bar{g}}$). Also ergibt sich auch hier $g_1 = g_2$ und daraus $g_1 = \mathrm{Cont}_E F$. Der Punkt $z := g_1 \cap h$ ist wegen $\mathrm{Sing}\, F = \bar{\bar{g}}$ regulär und es folgt $E = T_z F \supset h$, was aber oben ausgeschlossen wurde. ∎

Satz 3.10.3. *Die Quartiken vom Typ (i3) besitzen eine einparametrige Familie von Kegelschnitten.*

Beweis. Zu zeigen: $card\, C_{1,2}(F)^{irr} = \infty$ (daraus folgt $\dim C_{1,2}(F)^{irr} \geq 1$). Zu jedem Punkt $x \in \bar{\bar{g}}$, durch den zwei von $\bar{\bar{g}}$ verschiedene Geraden $g_1 \neq g_2$ gehen, betrachte man die Verbindungsebene E_x von g_1 und g_2. Man erhält zunächst $(F \cap E_x)^{div} = g_1 + g_2 + C_x$ mit $\deg C_x = 2$. Bei C_x handelt es sich aber bestimmt um einen Kegelschnitt, denn wegen $E_x \not\supset \bar{\bar{g}}$ gilt $E_x \not\subseteq TC_xF$ (Satz 2.6.1) also nach Lemma 2.5.5 $\mu_x((F \cap E_x)^{div}) = 3$, wohingegen aus $C_x = h_1 + h_2$ mit (eventuell übereinstimmenden) Geraden h_1 und h_2 $\mu_x((F \cap E_x)^{div}) = 4$ folgen würde ($x \in g_1, g_2, h_1, h_2$). ■

Kapitel 4

Zusammenfassung

Abschließend wird eine Übersicht über die Ergebnisse der Arbeit gegeben. Für diejenigen Flächen, die hier von Interesse sind, werden dabei auch Gleichungsdarstellungen zusammengestellt. Allerdings wird die Wahl des Koordinatensystems hier nicht mehr wiederholt. Sie ist den entsprechenden Textstellen zu entnehmen. Die Symbole u_i, v_i, w_i stehen auch hier wieder für homogene Polynome vom Grad i.

Nachdem in Kapitel 2 alle theoretischen Hilfsmittel bereitgestellt wurden, konnten in Kapitel 3 sämtliche Quartiken, auf denen es eine einparametrige algebraische Familie von Kegelschnitten gibt, bestimmt werden. Es zeigte sich in Paragraph 3.1, daß es unter den Quartiken, welche keine Kurve singulärer Punkte besitzen, nur zwei Typen mit dieser Eigenschaft gibt. Für diese ist die Chow–Varietät $C_{1,2}(F)^{irr}$, die man Satz 2.2.2 zufolge als universelle Parametervarietät der Familie aller auf F gelegenen Kegelschnitte betrachten kann, irreduzibel und eindimensional (d.h. es gibt im wesentlichen genau eine algebraische Familie von Kegelschnitten auf diesen, siehe Satz 3.1.8). Es wurden die Typen–Benennungen (j1) und (j2) verwendet und in Satz 3.1.7 folgende Gleichungsdarstellungen ermittelt:

(j1): $(2x_0x_3 + u_2)^2 + x_1x_2(x_1 + x_2)(x_1 + ax_2) = 0$
mit $a \neq 1, 0$ und $u_2 \in k[x_1, x_2]$.

(j2): $(x_3^2 + 2x_0x_1 + u_2)^2 + x_2(x_1 + x_2)(x_1 + ax_2)(x_1 + bx_2) = 0$
mit $a \neq 1$, $b \neq 1$, $a \neq b$ und $u_2 \in k[x_1, x_2]$.

Die Flächen des ersten Typs besitzen zwischen zwei und vier isolierte Singularitäten, während es im Fall von (j2) genau eine solche gibt.

Die Quartiken mit einer Kurve singulärer Punkte wurden anschließend gemäß der Unterteilung aus Paragraph 3.2 untersucht. Mit Ausnahme der sechs Typen (a1), (c1), (g), (h1), (i1) und (i2), bei denen es sich stets um Regelflächen handelt, und die abgesehen vom Doppelpunktskegelschnitt im Fall (c1) überhaupt keine Kegelschnitte enthalten (Sätze 3.3.4, 3.5.2, 3.8.1, 3.9.3 und 3.10.2), besitzen alle diese Quartiken mindestens eine einparametrige Familie von Kegelschnitten. Auch zu diesen gehören Regelflächen, namentlich die Typen (a2), (c2), (f1), (d) und (i3). Im Fall des Typs (a2) erhält man als Gleichung:

(a2): $a_{00}(x_0x_2 - x_1^2)^2 + a_{11}(x_0x_3 - x_1x_2)^2 + a_{22}(x_1x_3 - x_2^2)^2 +$
$+2a_{01}(x_0x_2 - x_1^2)(x_0x_3 - x_1x_2) + 2a_{02}(x_0x_2 - x_1^2)(x_1x_3 - x_2^2) +$
$+2a_{12}(x_0x_3 - x_1x_2)(x_1x_3 - x_2^2) = 0$
mit $a_{ij} \in k$, $det(a_{ij})_{i,j=0,\ldots,2} \neq 0$ und $a_{00}a_{22} - 4a_{01}a_{12} + 2a_{02}a_{11} + a_{11}^2 \neq 0$

Die Determinantenbedingung sorgt für die Irreduzibilität der Gleichung, während die letzte Bedingung die Quartiken vom Typ (a1) ausschließt (man verwende die Gleichung des Geradenkomplexes K_1 (3.5) und beachte, daß die duale Varietät $P^\vee$ der Plückerquadrik P dieselbe Gleichung wie P besitzt, letztere ist im Anfang von Paragraph 2.5 angegeben). Sind in der Gleichung speziell $a_{02} = 2$, $a_{11} = -1$ und alle anderen Zahlen null, so liegt Gleichung (3.4) einer Torse vor. Gleichungsdarstellungen für die Typen (c2), (f1) und (d) werden später als Spezialisierungen allgemeinerer Gleichungen auftreten, welche für die Typen (b), (f) und (h) angegeben werden. Eine Quartik vom Typ (i3) besitzt in geeigneten Koordinaten die Gleichung:

(i3): $x_2x_0x_1u_1 + x_3u_3 + x_0x_1u_2 = 0$
mit $u_1, u_2, u_3 \in k[x_0, x_1]$ und wobei u_2 nicht von u_1 und u_3 nicht von x_0x_1 geteilt wird.

Dabei liegen die Koordinatengrundpunkte A_2 und A_3 auf der dreifachen Gerade $\bar{\bar{g}}$ von F, während A_0 und A_1 je auf einer der zwei von $\bar{\bar{g}}$ verschiedenen, auf F gelegenen Geraden durch A_2 befindlich sind. Eine solche Gleichung liefert auch stets eine Quartik vom Typ (i3).

Es wurden drei Flächen mit einer zweiparametrigen Familie von Kegelschnitten aufgefunden. Es handelte sich dabei um die Römerfläche von Steiner (Typ (e)) und ihre beiden Entartungstypen (f10) und (h7), deren Behandlung in Paragraph 3.6 erfolgte, wo auch ihre Gleichungen ermittelt wurden ((3.12), (3.13), (3.14)).

(e): $x_1^2x_2^2 + x_1^2x_3^2 + x_2^2x_3^2 - 2x_0x_1x_2x_3 = 0$
(f10): $x_1^4 + 2x_0x_1^2x_2 + x_2^2x_3^2 = 0$
(h7): $(x_1^2 + 2x_2x_3)^2 + x_2^3x_0 = 0$

Für diejenigen Quartiken, die mit Hilfe der Segre–Symbole unterschieden wurden (Tabelle 1, 2 und 3), wäre es zu mühsam, in jedem Fall eine Gleichung aufzustellen. Gemeinsam für die Flächen der Typen (b) und (c) wurde in 3.5 bereits die Gleichung (siehe (3.11))

(b)+(c): $f = (x_1^2 + 2x_0x_2 - 2x_3u_1)^2 - 4x_3^2(u_2 + u_1^2) = 0$
mit $u_1, u_2 \in k[x_0, \ldots, x_3]$

angegeben. Man sieht, daß f genau dann reduzibel ist, wenn $-u_2$ in Linearfaktoren zerfällt, deren Summe gerade u_1 ergibt, denn f kann allerhöchstens in zwei irreduzible quadratische Faktoren der Form $(x_1^2 + 2x_0x_2 - 2x_3v_1)(x_1^2 +$

$2x_0x_2 - 2x_3w_1)$ zerfallen. Man erhält obige Gleichung aus (3.9) etwa durch Einsetzen der beiden Polynome $f_1 = x_1^2 + 2x_0x_2 + 2x_3x_4$ und $f_2 = x_4^2 + 2x_4u_1 - u_2$. Um die Segre–Charakteristik der Quartik zu ermitteln transformiert man $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_0' + ix_2')$, $x_1 = x_1'$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_0' - ix_2')$, $x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_3' + ix_4')$ und $x_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_3' - ix_4')$ (die gestrichenen sind die neuen Koordinaten!). Nach Ausführung der Transformation erhält man aus f_1 und f_2 die Polynome $\tilde{f}_1 = x_0'^2 + x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2$ und $\tilde{f}_2 = x'^* \tilde{A}_2 x'$ mit einer symmetrischen Matrix $\tilde{A}_2$, an deren Jordan–Normalform man die Segre–Charakteristik von F ablesen kann (siehe Anschluß an Satz 3.4.9). Die einzigen Quartiken von obigem Gleichungstyp, die keine einparametrige Familie von Kegelschnitten besitzen, sind diejenigen vom Typ (c1). Um diese auszuschließen, muß gefordert werden, daß die Matrix $\tilde{A}_2$ keinen Eigenwert der algebraischen Vielfachheit fünf und geometrischen Vielfachheit zwei besitzt (Typ (c1) entspricht dem Segre–Typ [(32)]). Um gezielt die Gleichung einer Fläche der Typen (b1) bis (b8) oder (c2) zu ermitteln, kann man die Normaldarstellung von Φ gemäß Satz 3.4.9 verwenden, und die Projektion π_y an Hand von Gleichung (3.9) durchführen (Bez. aus Paragraph 3.4). Dies soll hier jedoch unterbleiben.

Alle bis hierhin noch nicht mit einer Gleichung versehenen Quartiken unseres Interesses besitzen eine Doppelgerade, mit der Eigenschaft, daß alle bis auf höchstens endlich viele Ebenen durch dieselbe Kegelschnitte der Quartik enthalten, wodurch eine der eventuell mehereren Kegelschnittfamilien auf F gegeben ist. Es sind dies die Typen (f1) bis (f9), (d), (h2) bis (h6) und (h8) (Tabelle 2, Satz 3.7.2, Tabelle 3). Gemäß Paragraph 3.9 besitzen all diese eine Gleichung der Art (vgl. (3.16)):

(f)+(h): $f = x_2^2u_2 + 2x_2x_3v_2 + x_3^2w_2 + 2x_2u_3 + 2x_3v_3 + u_4 = 0$
mit zueinander teilerfremden $u_2, v_2, w_2, u_3, v_3, u_4 \in k[x_0, x_1]$ (Satz 3.9.1) und $u_4(u_2w_2 - v_2^2) - v_3^2u_2 - u_3^2w_2 + 2u_3v_3v_2 \not\equiv 0$ (gemäß der Abhandlung im Anschluß an Gleichung (3.18)).

Um an dieser Stelle endlich den Schlußpunkt der Arbeit zu finden, soll es dem Leser überlassen bleiben, zur Betrachtung der einzelnen Untertypen, welche durch die letzte Gleichung zusammengefaßt sind, selbige zu vereinfachen. Die der Segre–Methode zugänglichen Flächen können auch hier mit Hilfe der Normaldarstellung von Φ (gemäß Satz 3.4.9) gezielt mit Gleichungen versehen werden, wenn man die entprechenden Projektionen π_y an Hand von (3.9) durchführt.

Literaturverzeichnis

[1] Burau, W.: Algebraische Kurven und Flächen. Bd. I. Berlin. 1962. 153S.

[2] Burau, W.: Algebraische Kurven und Flächen. Bd. II. Berlin. 1962. 162S.

[3] Burau, W.: Mehrdimensionale projektive und höhere Geometrie. Berlin 1961. 436S.

[4] Castelnuovo, G.; Enriques, F.: Grundeigenschaften der algebraischen Flächen. In : Enz. d. Math. Wiss. Bd. III.2.1. Leipzig. 1903-1915. 636-676

[5] Clebsch, A.: Über die Abbildung algebraischer Flächen, insbesondere der vierten und fünften Ordnung. Math. Ann. 1 (1869). 253-316

[6] Degen, W.: Zur projektiven Differentialgeometrie der Flächen, die von einer einparametrigen Schar von Kegelschnitten erzeugt werden. Teil I. Math. Ann. 155 (1964). 1-34

[7] Degen, W.: Die zweifachen Blutelschen Kegelschnittflächen. manuscripta mathematica 55 (1986). 9-38

[8] Green, M. L.: The equations defining Chow-Varieties. Duke Mathematical Journal. Vol.53.3 (1986). 733-747

[9] Gröbner: Moderne algebraische Geometrie. Wien-Innsbruck. 1949. 211S.

[10] Hartshorne, R.: Algebraic Geometry. New York-Heidelberg-Berlin. 1977. 496S.

[11] Holme, A.: The Geometric and Numerical Properties of Duality in Projective Algebraic Geometry. manuscripta mathematica 61 (1988) 145-168.

[12] Jessop, C. M.: Quartik Surfaces with Singular Points. Cambridge. 1916. 197S.

[13] Kleiman, S. L.: Tangency and Duality. In: Proceedings of the 1984 Vancouver Conference in Algebraic Geometry 163-226. CMS Conference Proceedings. The American Mathematical Society. 1986

[14] Kummer, E.: Über die Flächen vierten Grades, auf welchen Schaaren von Kegelschnitten liegen. Jour. für reine und ang. Math. 64 (1865). 66-76

[15] Meyer, W. F.: Flächen vierter und höherer Ordnung. In: Enz. d. Math. Wiss. Bd. III.2.2.B Leipzig 1921-1934. 1537-1786

[16] Salmon, G.: Analytische Geometrie des Raumes. Bd. II. Leipzig 1880. 686S.

[17] Segre, C.: Mehrdimensionale Räume. In Enz. d. Math. Wiss. Bd. III.2 Leipzig. 1921.1928. 772-975

[18] Segre, C.: Etude des diffrentes surfaces du 4^e ordre conique double ou cuspidale (gnrale ou dcompose) considres quadratiques de l'espace quatre dimensions. Math. Ann. 24 (1884). 313-444

[19] Semple; Kneebone: Algebraic projectiv geometry. Oxford. 1952.

[20] Severi; Löffler: Vorlesung über algebraische Geometrie. Leipzig–Berlin. 1921 408S.

[21] Shafarevich, I. R.: Basic Algebraic Geometry. Berlin-Heidelberg 1974. 439S.

[22] Todd, J. A.: Conics in Space and their Representation by points in Space of nineteen Dimensions. Proceedings of the London Math. Soc. 36 (1932). 173-206

[23] Urabe, T.: Classification of Non-normal Quartik Surfaces. Tokyo J. Math. Vol.9 No. 2 (1986). 265-295

[24] v.d. Waerden, B. L.: Einführung in die algebraische Geometrie. 2. Aufl. Berlin-Heidelberg. 1973. 280S.

[25] v.d. Waerden, B. L.: Zur algebraischen Geometrie. Selected Papers. Berlin, Heidelberg u.a. 1983. 479S.

[26] v.d. Waerden, B. L.: Moderne Algebra II. Berlin. 1931. 216S.

[27] Zariski, O.: Algebraic Surfaces. 2. ergänzte Auflage. Berlin-Heidelberg-New York. 1971. 270S.